图论导引教程

(英)B.布鲁巴斯　著
赵树春　朱学志　译
李慰萱　　　审校

黑龙江科学技术出版社
一九八五年·哈尔滨

封 面 设 计：顾灵选

图论导引教程

[英]B·布鲁巴斯　著

[illegible]　朱学贤　译

李慰萱　审校

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区建设街35号）
黑龙江新华印刷厂附属厂印刷·黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米 1/32·印张9·字数183千
1985年10月第一版·1985年10月第一次印刷
印数：1—2,800

书号：13217·142　　　　定价：1.90元

译 者 序

本书是英国剑桥大学的教材。它用较少的篇幅介绍了图论的大部分主要论题，并且对图论的一些重要应用作了生动的描述。这是一本比较好的入门书，它可以作为我国大学数学、计算机科学等专业的教材或教学参考书，也是自学者的良好读物。

本书各章之后都附有大量的习题，并被分成基本的、一般的和较难的三类（较难的习题都附有详细的提示），以便于读者根据自己的需要完成习题的一部分或全部。各章最后还附有文献注释，虽然不十分详尽，却能使读者熟悉图论的一些主要问题的来龙去脉。

本书著者还有另一本有名的专著“Extremal Graph Theory”，Acadomic Press，1978。它虽然先于本书出版，但对与极图有关的若干问题阐述得更为深刻，因此可看作本书的续篇。

本书译稿曾由刘诚超同志进行初校，在此谨致谢意。

1984．9．1．

序

本书是写给对图论感兴趣、并希望图论成为他们数学课程一部分的年轻学生们的。剑桥大学的经验表明，目前流行的课本都不能满足这种需要。有的课本对这些读者来说是太专门化了，有的则缺乏揭示该学科本质所必须的深度和广度。

我们的出发点在于，图论是很为学生瞩目的几门课程之一，而且，它应有助于提高学生对整个数学领域的鉴赏力。因此，本书不仅讲述了基本结果，也包含一些评述性章节，并把所论述的课题讲得妙趣横生，以求唤起学生的兴趣。那些对于理论的展开至关重要的定理均得到清楚的阐述，并有完整和详细的证明，从而本书为图论提供了一个周详的导引，它足以成为该学科大部分论题的坚实基础。

每章包含三至四节，并附有练习题和文献评注。带“－”号的是基本练习题；带“＋”号的是较难的练习题，一般附有详细的提示。在开头几节中，因为读者刚入门，所以尽管内容简单，证明也很容易，却叙述得很详细。后面的章节是为对图论已产生兴趣的读者写的，虽然所涉及的定理比较深刻，证明也不简单，却叙述得很简要。读者在这本书中到处都含发现图论与数学的各分支的联系，这些分支包括最优化理论、线性代数、群论、射影几何、表示论、概率论、分析、纽结理论和环论。尽管这些联系的大多数对理解本书内

容并不是绝对必要的，但读者适当熟悉这些知识也是大有益处的。有关文献的注释不太完整，仅望能引导读者去了解有关的资料而已。

B．布鲁巴斯

1979、4，于剑桥大学

目　录

第 1 章 基础知识

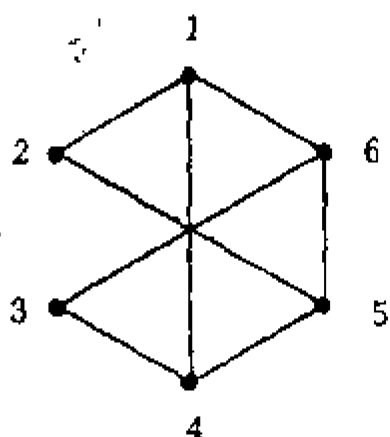
本书的目的是使读者熟悉图论的基本概念和结果。本章不可避免地要包括大量的定义，为了防止读者厌倦，我们将尽快地证明一些简单的结果。在浏览本书的其余部分之前，读者不要期望能完全掌握本章的内容。事实上，因为大部分术语一看就懂，读者在阅读时完全可以先跳过本章的一部分内容。我们在此附带说明一点，虽然图论的术语远未标准化，但是本书所使用的术语都是通用的。

§1 定 义

一个图 G 是两个不相交的集所组成的有序对 (V,E)，其中 E 是 V 的元素的无序对之集的一个子集。如果不是另有说明，我们考虑的只是**有限图**，即 V 和 E 总是有限的。集 V 是**顶点集**，而 E 是**边集**，如果 G 是一个图，则 $V=V(G)$ 是 G 的顶点集，而 $E=E(G)$ 是 G 的边集。我们说边 $\{x, y\}$ **联结**顶点 x 和 y，并记作 xy，这样，xy 和 yx 代表同一边，顶点 x 和 y 是这条边的**端点**。如果 $xy\in E(G)$，则 x 和 y 是 G 的**邻接的**或**相邻的**顶点，而顶点 x 和 y 是同边 xy **相关联**的。如果两条边恰有一个公共端点，就说它们是**邻接**的。

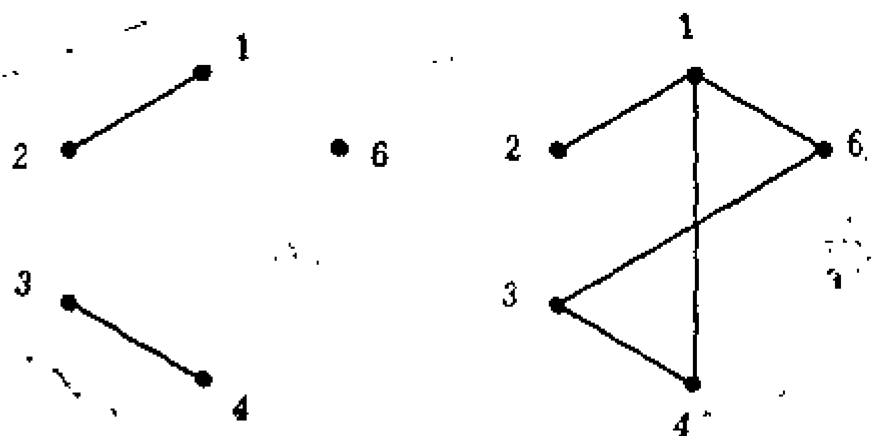
正像从术语字面上所能看出那样，通常，我们不把一个图看作一个有序对，而把它看成是一些顶点的总体，而其中

有的顶点之间由边联结。于是，把一个图的图形画出来就是很容易了，事实上，把一个图画出来有时是描述它的最容易的方法；图 $G=(\{1,2,3,4,5,6\},\{12,14,16,25,34,36、45、56\})$ 在用图Ⅰ.1表示后便一目了然了。



图Ⅰ.1. 一个图。

如果 $V'\subset V$，$E'\subset E$，我们说 $G'=(V',E')$ 是 $G=(V,E)$ 的一个**子图**，并记作 $G'\subset G$。如果 G' 包含 G 的联结 V' 两个顶点的所有边，则说 G' 是由 V' **导出的**或**生成的子图**，记作 $G[V']$。如果 $G'=G[V(G')]$，则说 G' 是 G 的**导出子图**。



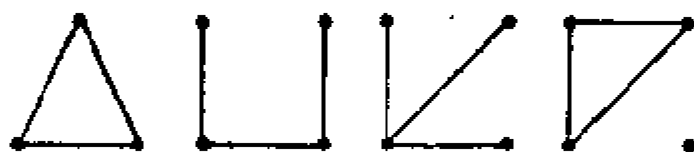
图Ⅰ.2. 图Ⅰ.1的图的子图和导出子图。

这些概念用图Ⅰ.2来说明。

我们常用删除或添加一些顶点或边的办法来构造一些新图。如果 $W\subset V(G)$，则 $G-W=G[V\backslash W]$ 是在 G 中删除 W 中的顶点和与它们关联的所有边而得到的子图。同样，

如果$E'\subset E(G)$，则$G-E'=(V(G), E(G)\backslash E')$。如果$W=\{w\}$和$E'=\{xy\}$，则简记为$G-w$和$G-xy$。同样，如果$x$和$y$是$G$中不邻接的顶点，则$G+xy$是在$G$中联结$x$和$y$所得到的图。

如果x是图G的一个顶点，通常，我们把$x\in V(G)$简记作$x\in G$。G的**阶**是其顶点的数目，记作$|G|$。我们也用同样的记号来表示一个集的元素的数目（基数）：$|X|$表示集X的元素的数目。于是，$|G|=|V(G)|$。G的**级**是其边的数目，记作$e(G)$。我们把任意一个n阶图记作G^n。同样，$G(n, m)$表示任意一个n阶和m级的图。



图Ⅰ.3. 级为3而阶至多为4的图。

如果在两个图之间存在一个保持邻接性的1—1对应，则这两个图是**同构的**，即如果存在这样的双射函数$\phi: V\to V'$，$xy\in E$当且仅当$\phi(x)\phi(y)\in E'$，则$G=(V, E)$同构于$G'=(V', E')$。显然，同构的图有同样的阶和级。除了要考虑顶点集中各顶点可以区别或带有标号的图的情形（例如一个给定的图的一些子图），通常，在同构图之间不加以区别。依据这一约定，如果G和H是同构图，则可以记作$G\cong H$，或简记作$G=H$。在图Ⅰ.3中我们画出了级为3而阶至多为4的所有子图（在同构的范围内）。

n阶图的级至少为0，而至多是$\binom{n}{2}$。显然，对每个m，

$0 \leqslant m \leqslant \binom{n}{2}$，存在图 $G(n, m)$。n 阶 $\binom{n}{2}$ 级的图称为**完全 n—图**，记作 K^n；**空 n—图** E^n 是 n 阶无边的图。在 K^n 中每两个顶点都是邻接的，而在 E^n 中，任何两个顶点都是不邻接的。图 $K^1 = E^1$ 称为**平凡图**。

与顶点 $x \in G$ 邻接的所有顶点的集记作 $\Gamma(x)$，x 的**度**是 $d(x) = |\Gamma(x)|$。如果我们要强调这是在图 G 中考虑的，则记作 $\Gamma_G(x)$ 和 $d_G(x)$。类似的约定也适用于依赖一个图的其它函数。这样，如果 $x \in H = G[W]$，则

$\Gamma_H(x) = \{y \in H: xy \in E(H)\} = \Gamma_G(x) \cap W$。

图 G 的各顶点的**最小度**记作 $\delta(G)$，而**最大度**记作 $\Delta(G)$。0 度的顶点称为**孤立顶点**。如果 $\delta(G) = \Delta(G) = k$，即 G 的每个顶点的度皆为 k，则称 G 是 **k—正则的**或 **k 度正则的**。如果对某个数 k，一个图是 k—正则的，称它为**正则图**，3—正则图称为**三次的**。

如果 $V(G) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，则 $(d(x_i))_1^n$ 是 G 的**度序列**。通常，我们把顶点按一定次序排列，使相应的度序列是单调递增的或单调递减的，例如 $\delta(G) = d(x_1) \leqslant d(x_2) \leqslant \cdots \leqslant d(x_n) = \Delta(G)$。因为每条边有两个端点，各顶点的度之和恰为边数的二倍：

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) = 2e(G)。 \tag{1}$$

特别是，各顶点的度之和是偶数：

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) \equiv 0 \pmod 2。 \tag{2}$$

式(2)有时称为**握手引理**，因为它表示：在任何一次集会中，握过的手的总数是偶数。同样，式(2)表示度为奇数的顶点的数目是偶数。从式(1) 我们可以看出$\delta(G) \leqslant \lfloor 2e(G)/n \rfloor$和$\Delta(G) \geqslant \lceil 2e(G)/n \rceil$，此处$\lfloor x \rfloor$表示不大于$x$的最大整数，而$\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$。

一条**路**是形如，

$V(P) = \{x_0, x_1, \cdots, x_l\}, E(P) = \{x_0x_1, x_1x_2, \cdots, x_{l-1}x_l\}$

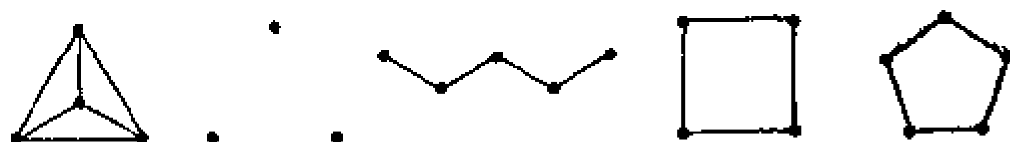
的一个图P。这条路P通常记作$P = x_0x_1\cdots x_l$，顶点x_0和x_l是P的**端顶点**，而$l = e(P)$是P的**长**，我们说P是从x_0到x_l的路或x_0—x_l路，当然，P也是从x_l到x_0的路或x_l—x_0路。有时，我们要强调P是从x_0到x_l的路，称x_0是P的**始顶点**，而x_l是P的**终顶点**。以x为始顶点的路称为**x—路**。

独立性这个词将对图的顶点、边和路使用，如果在顶点（边）的一个集中，没有两个顶点（边）是邻接的，则说该顶点（边）集是**独立的**；如果在路的一个集中的任何两条路，只有它们的端顶点才可能是其公共顶点，则说路的这个集是**独立的**。这样，P_1，P_2，…，P_k是独立的x—y路当且仅当$V(P_i) \cap V(P_j) = \{x, y\}$，$i \neq j$，此外，$W \subset V(G)$是顶点的一个独立集当且仅当$G[W]$是空图。

我们考虑的大多数的路都是一个给定图的子图。G中的一条**通道**W是其顶点和边的一个交替序列：x_0，α_1，x_1，α_2，…，α_l，x_l，此处$\alpha_i = x_{i-1}x_i$，$1 \leqslant i \leqslant l$。按照上面的术语，通道$W$是$x_0$—$x_l$通道，并记作$x_0x_1\cdots x_l$，$W$的**长**为$l$。如果通道$W$的所有边都是不同的，则说$W$是一条**迹**。

注意，路是具有互不相同的顶点的一条通道。端顶点重合的迹（闭迹）称为一个**回路**。$W=x_0x_1\cdots x_l$ 是这样的：$l\geqslant 3$，$x_0=x_l$，而且顶点 $x_i(0<i<l)$ 互不相同，又与 x_0 不同，则称 W 是一个**圈**。为了简便起见，这个圈记作 $x_1x_2\cdots x_l$。注意，这个记号与路的记号的不同之处在于 x_1x_l 也是这个圈的边，并且，$x_1x_2\cdots x_l$，$x_lx_{l-1}\cdots x_1$，$x_2x_3\cdots x_lx_1$，$x_ix_{i-1}\cdots x_1x_l\cdots x_{i+1}$ 都表示同一个圈。

记号 P^l 表示任意的一条长为 l 的路，而 C^l 表示长为 l 的圈。我们称 C^3 为三角形，C^4 为四边形，C^5 为五边形，等等（见图Ⅰ.4）。如果一个圈的长为偶数（奇数），则称该圈是**偶(奇)的**。

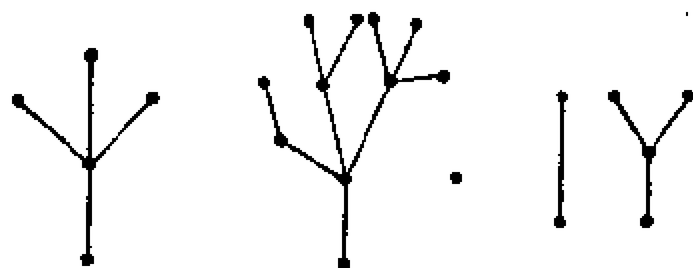


图Ⅰ.4. 图 K^4，E^4，P^4，C^4 和 C^5。

给定两个顶点 x 和 y，它们的**距离** $d(x,y)$ 是所有 $x—y$ 路的长的最小值。如果不存在 $x—y$ 路，则规定 $d(x,y)=\infty$。

如果对于一个图的每一对不同的顶点 $\{x,y\}$，都存在从 x 到 y 的路，则称该图是**连通的**。注意，阶至少为 2 的连通图不可能包含孤立顶点。一个图的极大连通子图称为其**分支**。如果删除图的一个顶点，使图的分支数增加，则称该顶点为**割点**。如果删除一条边使图的分支数增加，则称该边为**桥**。于是，如果删除连通图的一条边，使此图变成不连通

的，则该边是桥。没有任何圈的图称为**森林**或**无圈图**；一个连通的森林称为一棵**树**（见图Ⅰ.5）。如果我们注意到森林是不相交的树的并，即森林为其各个分支都是树的图，那么树与森林的关系就很自然了。



图Ⅰ.5. 森林。

如果 $V(G)=V_1\cup V_2$，$V_1\cap V_2=\phi$，而每条边都联结 V_1 的一个顶点和 V_2 的一个顶点，则称 G 为具有顶点类 V_1 和 V_2 的**二部图**。同样，如果 $V(G)=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_r$，$V_i\cap V_j=\phi$，$1\leqslant i<j\leqslant r$，而且没有边联结同一类中的两个顶点，则称 G 为具有顶点类 V_1，V_2，…，V_r 的 **r—部图**。图Ⅰ.1 和图Ⅰ.5 中的图都是二部图。记号 $K(n_1, \cdots, n_r)$ 表示**完全 r—部图**：在第 i 类中有 n_i 个顶点，而且包含所有联结不同类的两个顶点的边。为了简便起见，我们常把 $K(p, q)$记作 $K^{p,q}$，而把 $K(t,\cdots,t)$记作 $K_r(t)$。

我们记 $G\cup H=(V(G)\cup V(H), E(G)\cup E(H))$，且把 k 个不相交的 G 的并记作 kG。我们在$G\cup H$中添加 G 和 H 之间的所有边，就得到**联** $G+H$。于是，$K^{2,3}=E^2+E^3$，而 $K_r(t)=E^t+E^t+\cdots+E^t$。

还有一些与图有关的概念。**超图**是一个有序对(V, E)，此处 $V\cap E=\phi$，且 E 是 $\rho(V)$的一个子集，其中 $\rho(V)$是 V 的幂集，即 V 的所有子集所成的集。事实上，在超图类和某些二部图之间存在一种简单的 1—1 对应，的确，给定一

个超图(V,E)，可以构造一个具有顶点V和E类的二部图，使$x\in V$和$s\in E$之间有边当且仅当$x\in s$。

按定义，图不包含**自环**，即联结一个顶点与其自身的“边”；图也不包含**重边**，即联结相同两个顶点的若干条“边”。在**重图**中允许有重边和重自环，自环是一种特殊的边。

如果边都是顶点的有序对，则得到**有向图**和**有向重图**的概念。有序对$(a,\ b)$称为从a到b的**有向边**，或始于a终于b的有向边，记作$\overrightarrow{ab}$或简记作ab。对图定义的一些概念，加以必要的修改，就可以搬到重图、有向图和有向重图中，这样，在有向重图中的（有向）迹是顶点和边的一个交替序列：$x_0,e_1,x_1,e_2,\cdots,e_l,x_l$，其中$e_i$始于$x_{i-1}$，终于$x_i$，$1\leqslant i\leqslant l$[+]。

定向图是把图的每条边定向，即给边ab以方向$\overrightarrow{ab}$或$\overrightarrow{ba}$所得到的有向图，这样，在定向图中$\overrightarrow{ab}$和$\overrightarrow{ba}$最多只能出现一个。

§2 路，圈和树

利用已定义的各种概念，现在我们可以着手证明关于图的一些结果。这些结果均很简单，我们介绍它们的主要目的是使读熟悉概念。为了与其它各章保持一致，我们也称这些结果为定理。

+ $e_1,e_2,\cdots,e_l$可不相同——译注。

定理 1. 令 x 是图 G 的一个顶点，W 为包含 x 的分支的顶点集，则下列结论成立。

i. $W=\{y\in G: G$ 包含 $x—y$ 路$\}$。

ii. $W=\{y\in G: G$ 包含 $x—y$ 迹$\}$。

iii. $W=\{y\in G: d(x,y)<\infty\}$。

iv. 对于 $u,v\in V=V(G)$，置 uRv 当且仅当 $uv\in E(G)$，且令 $\tilde{R}$ 是 V 中的包含 R 的极小等价关系，则 W 是 x 的等价类。 □

这个简单结果蕴含这样的意思：每个图是其各分支的顶点不重的并（同样地，每个顶点包含在唯一一个分支中），而一条边是桥当且仅当它不包含在圈中。

定理 2. 一个图是二部图当且仅当它不包含奇圈。

证明： 假设 G 是具有顶点类 V_1 和 V_2 的二部图。令 $x_1x_2\cdots x_l$ 是 G 中的一个圈，可以假设 $x_1\in V_1$，则 $x_2\in V_2$，$x_3\in V_1$，等等：$x_i\in V_1$ 当且仅当 i 是奇数。因为 $x_l\in V_2$，故 l 是偶数。

现在假设 G 不包含奇圈。因为一个图是二部图当且仅当它的每个分支都是二部图，故我们可以假设 G 是连通的。取一个顶点 $x\in V(G)$，且记 $V_1=\{y\in V(G): d(x,y)$ 是奇数$\}$。不存在联结同类中两个顶点的边，因为不然的话，G 将包含奇圈，因此，G 是二部图。 □

定理 3. 一个图是森林当且仅当对于其每对不同的顶点 $\{x,y\}$，它至多包含一条 $x—y$ 路。

证明： 如果 $x_1x_2\cdots x_l$ 是 G 中的圈，则 $x_1x_2\cdots x_l$ 和 x_1x_l 是 G 中的两条 $x_1—x_l$ 路。

反之，令 $P_1=x_0x_1\cdots x_l$ 和 $P_2=x_0y_1\cdots y_kx_l$ 是图 G 中的两条不同的 x_0—x_l 路。令 $i+1$ 是使 $x_{i+1}\neq y_{i+1}$ 的最小下标，且令 j 是使 $j\geqslant i$ 和 y_{j+1} 在 P_1 中的最小下标，设 $y_{j+1}=x_h$，则 $x_ix_{i+1}\cdots x_hy_jy_{j-1}\cdots y_{i+1}$ 是 G 中的圈。 □

定理 4. 对于一个图 G，下列各结论是等价的。

i, G 是一棵树。

ii. G 是一个极小连通图，即 G 是连通的，如果 $xy\in E(G)$，则 $G-xy$ 是不连通的。（换言之，G 是连通的，且每条边都是桥。）

iii. G 是一个极大无圈图，即 G 是无圈的，如果 x 和 y 是 G 的两个不邻接的顶点，则 $G+xy$ 包含圈。

证明： 假设 G 是一棵树，令 $xy\in E(G)$。图 $G-xy$ 不能包含 x—y 路 $xz_1z_2\cdots z_ky$，因为不然的话，G 包含圈 $xz_1z_2\cdots z_ky$，因此 $G-xy$ 是不连通的，故 G 是一个极小连通图。同样，如果 x 和 y 是树 G 的一对不邻接的顶点，则 G 包含一条路 $xz_1z_2\cdots z_ky$，因而 $G+xy$ 包含一个圈 $xz_1z_2\cdots z_ky$，所以 G 是极大无圈图。

其次，假设 G 是一个极小连通图。若 G 包含一个圈 $xz_1z_2\cdots z_ky$，则 $G-xy$ 还是连通的，这是因为在 G 的任何 u—v 通道中，边 xy 可以用路 $xz_1z_2\cdots z_ky$ 来代替。由于这与 G 的极小性矛盾，我们就推得 G 是无圈的，所以 G 是一棵树。

最后，假设 G 是极大无圈图。G 是连通的吗？是的，因为顶点 x 和 y 属于 G 的不同的分支，则把 xy 添加到 G 中，不能产生圈 $xz_1z_2\cdots z_ky$，因为不然的话，在 G 中有路

$xz_1z_2\cdots z_ky$，这样，G 是一棵树。 □

推论 5. 每个连通图都包含**生成树**，所谓一个图的生成树，是包含该图的所有顶点的树。

证明： 取一个极小连通生成子图。构造一个图 G 的生成树有几种简单的方法，我们介绍其中的两种。取一个顶点 x，并置 $V_i=\{y\in G: d(x, y)=i\}$，$i=0, 1, \cdots$。注意，如果 $y_i\in V_i$，$i>0$，而且 $xz_1z_2\cdots z_{i-1}y_i$ 是一条 $x—y_i$ 路（其存在由 V_i 的定义保证），则对每个 $j(0<j<i)$，$d(x, z_j)=j$。特别是，对 $0\leqslant j\leqslant i$，$V_j\neq\phi$，而且对每个 $y\in V_i$ $(i>0)$，存在一个顶点 $y'\in V_{i-1}$ 联结于 y。（当然，这样的顶点 y' 通常不是唯一的，但对于每个 $y\neq x$，我们仅取一个 y'）。令 T 是 G 的一个子图，它有顶点集 V 和边集 $E(T)=\{yy': y\neq x\}$，则 T 是连通的，因为每个 $y\in V-\{x\}$ 由路 $yy'y''\cdots x$ 与 x 联结，并且，T 是无圈的，因为若 W 是 V 的一个子集，而 w 是 W 中与 x 距离最远的点，则 w 至多与 W 中一个顶点联结，这样，T 是一棵生成树。 □

上面的论证表明，关于 $k=\max\limits_{y} d(x,y)$，对 $0\leqslant i\leqslant k$，有 $V_i\neq\phi$，而 $V=V(G)=\bigcup_0^k V_i$。在这里要指出，$\text{diam}G=\max\limits_{x,y} d(x,y)$ 称为 G 的**直径**，而 $\text{rad } G=\min\limits_{x}\max\limits_{y} d(x,y)$ 称为 G 的**半径**。

如果我们选取 $x\in G$，使 $k=\max\limits_{y} d(x,y)=\text{rad } G$，则生成树 T 也有半径 k。

将上而构造 T 的方法稍加改变如下：取 $x\in G$，令 T_1 是只有这一个顶 x 的 G 的子图，则 T_1 是树。假设我们已经构造了树 $T_1\subset T_2\subset\cdots\subset T_k\subset G$，此处 T_i 为 i 阶的。如果 $k<$

$n=|G|$，则根据 G 的连通性，存在一个顶点 $y\in V(G)-V(T_k)$，它邻接（在 G 中）于一个顶点 $z\in T_k$。令 T_{k+1} 是在 T_k 中添加顶点 y 和边 yz 而得到的子图，则 T_{k+1} 是连通的，而且因为 yz 不能是 T_{k+1} 中某个圈的边，T_{k+1} 也是无圈的，这样，T_{k+1} 也是树。如此，序列 $T_1\subset T_2\subset\cdots$ 可以继序到 T_n，则 T_n 是 G 的生成树。

上面讲述的随便哪一种方法所构造的生成树有阶 n（当然！）和级 $n-1$。在第一个构造中，在 $V-\{x\}$ 与 $E(T)$ 之间存在一个1—1对应，它由 $y\to yy'$ 给出；而在第二个构造中，对每个 k，有 $e(T_k)=k-1$，还由于 $e(T_1)=0$，而 T_{k+1} 比 T_k 多一条边。因为根据定理 4，每个树有唯一的生成树，即它自身，我们已得到了下面的结果。

推论 6. n 阶树有级 $n-1$，有 k 个分支的 n 阶森林有级 $n-k$。 □

这个推论的第一部分可以组成树的其它几个特征，特别是，n 阶图是树当且仅当它是连通的并有级 $n-1$，请读者自己证明这个特征（练习 9）。

推论 7. 至少 2 阶的树包含至少 2 个 1 度的顶点。

证明： 令 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_n$ 是 $n\geqslant 2$ 阶树 T 的度序列。因为 T 是连通的，$\delta(T)\geqslant 1$，因此，如果 T 至多有一个 1度顶点，根据(1)和推论 6，我们有

$$2e(T)=2n-2=\sum_{i=1}^{n}d_i\geqslant 1+2(n-1). \qquad \square$$

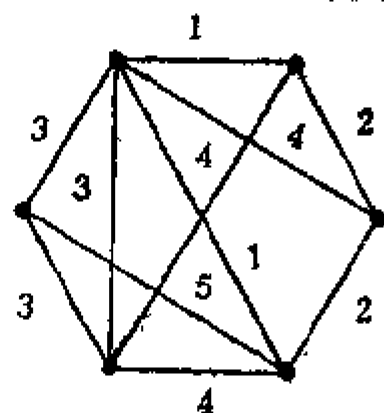
最优化理论中的一个有名的问题要求：用比较容易的方法来寻求具有某种特殊性质的生成子图。给定图 $G=(V,$

E)和定义在其各边上的正值费用函数 $f:E\to R^{+}$，求 G 的连通生成子图 $T=(V, E')$，使

$$f(T)=\sum_{xy\in E'}f(xy)$$

为最小。我们称这样的生成子图 T 为**廉价的生成子图**。把这个问题翻译成实际生活问题是不难的。假设某地一些村庄要与位于这些村庄之一的一个水源联结，管路系统由联结两个村庄的水塔的水管组成，对于可以建造联结水管的任何两个村庄，我们知道其水管的造价，怎样求出一个廉价的管路系统呢？

为了把第二个问题化成上面关于图的问题，令 G 是一个图，其顶点集是这些村庄的集，而 xy 是 G 的一条边当且仅当联结 x 和 y 的水管可以建造；用 $f(xy)$表示这样一条水管的造价（见图Ⅰ.6），那么，一个管路系统对应于 G 的一个连通生成子图，因为这个系统必须是最廉价的，T 必是 G 的极小的连通生成子图，即 T 是 G 的一棵生成树。



图Ⅰ.6。具有函数 $f:E\to R^{+}$ 的图，边 xy 旁边的数是该边的费用 $f(xy)$。

我们要求的连通生成子图 T 必为极小连通子图，因为，不然的话，我们就能找到一条边 α，删除 α，还将保持 T 的连通性，则 $T-\alpha$ 是更廉价的生成子图，这样，T 是 G 的生成树。相应于生成树的几种特征和构造，有几种用以寻求廉

价的生成树的较容易的方法；我们将叙述这些方法中的四种。

(1) 给定图 G 和 $f: E \to \mathbf{R}^+$，选取 G 的最廉价的边之一，这就是 $f(a)$ 为最小的边 a。每个后继的边将从 G 的剩下的边中选取最廉价的一条边，唯一的限制是不选取任何圈中的所有边，即被选取的边构成的子图是无圈的。

当再没有边可以添加到已选取的边集 E' 中而又不产生圈时，上述过程终止，则 $T_1=(V(G), E')$ 是 G 的极大无圈子图，故根据定理 4(iii)，它是 G 的一棵生成树。

(2) 这个方法基于下面事实：除非为了保证子图的连通性，使用费用昂贵的边是不合算的。这样，我们逐一删除那些费用最多的边，并使得删除它们之后，不破坏图的连通性，根据定理 4(ii)，此过程终止于一棵生成树 T_2。

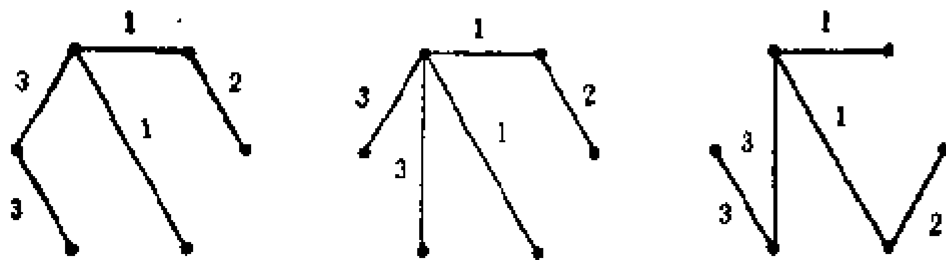
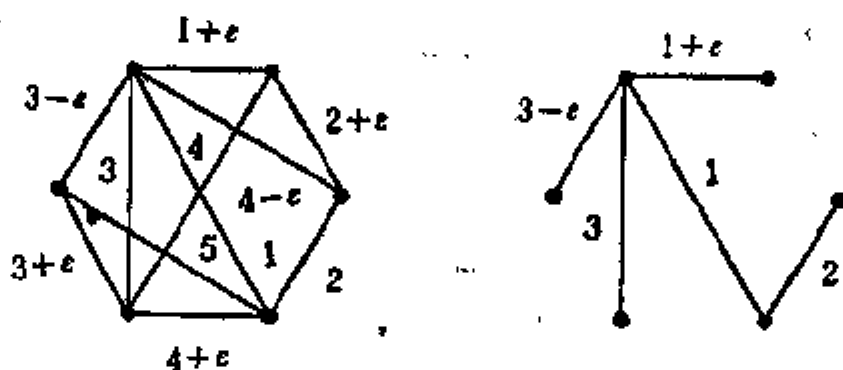


图 I.7. 图 I.6 中所示的图的六棵廉价的生成树中的三棵树。

(3) 取 G 的一个顶点 x_1，并选取与 x_1 关联的费用最小的一条边，比如说 x_1x_2。然后，选取一条形如 x_ix 的费用最小的边，其中 $1\leqslant i\leqslant 2$，$x\notin\{x_1, x_2\}$。找到了顶点 x_1，x_2，…，x_k，和对 $j\leqslant k$ 的每个顶点 x_j，找到了一条边 x_ix_j $(i<j)$ 后，再选取一条形如 x_ix 的费用最小的边，比如说是

$x_i x_{k+1}$，其中 $1 \leqslant i \leqslant k$，$x_{k+1} \notin \{x_1, x_2, \cdots x_k\}$。当我们选取了 $n-1$ 条边时，此过程终止。用 T_3 表示由这些边给定的生成树。（见图Ⅰ.7.）

（4）这个方法只适用于没有两条水管造价相同的情况。这个方法的优点是每个村庄可以做出自己的决定，并着手铺设水管，而不管其它村庄干不干。当然，每个村庄将铺设终止于本村庄的最廉价的一条水管。可能有两个村庄 x 和 y 都去铺设水管 xy，它们在中间相遇，x 和 y 之间的水管就铺设完了。最后，一些村庄将被水管联结起来，但整个管路系统不需要连通。下一步，每个被管路相互联结的村庄群，找到通往不在该群中的某个村庄的最廉价的水管，并开始铺设那条水管。重复同样的过程，直到获得连通系统为止。显然，一个圈上的所有水管不会都建造起来，因此，最终的管路系统是一棵生成树（见图Ⅰ.8.）



图Ⅰ.8. 带有稍加改变的费用函数$(0<\varepsilon<\frac{1}{2})$的图Ⅰ.6中的图和它的最廉价的生成树.

定理8. 上面叙述的四种方法的每一种方法都产生一棵

廉价的生成树。如果没有两条边具有相同的费用，就存在唯一一棵最廉价的生成树。

证明：取G的一棵廉价的生成树T，使T和T_1有尽可能多的公共边。（T_1是用第一种方法构造的生成树。）

假设$E(T_1)\neq E(T)$。设T_1的边已经逐一的选取了，令xy是第一条在T_1中而不在T中的边，则T包含唯一一条$x-y$路P，这条路P上至少有一条边uv不属于T_1，不然的话，T_1将包含一个圈。当xy已选做T_1的边时，边uv也是待选的边之一。因为我们选了xy，而uv没有被选取，边xy不能比uv的费用高，即$f(xy)\leqslant f(uv)$，则$T'=T-uv+xy$是生成树，而且因为$f(T')=f(T)-f(uv)+f(xy)\leqslant f(T)$，$T'$也是$G$的廉价的生成树。（当然，这个不等式蕴含$f(T')=f(T)$和$f(xy)=f(uv)$。）这棵树$T'$与$T_1$的公共边比$T$与$T_1$的公共边多，这同$T$的取法矛盾，因此，$T=T_1$，故$T_1$必是廉价的生成树。

稍微改变一下上面的论证，就可以证明，用第二种方法和第三种方法构造的生成树T_2和T_3也是廉价的，请读者完成其细节（练习 19）。

现在，假设没有两条边具有相同的费用，即当$xy\neq uv$，就有$f(xy)\neq f(uv)$。令T_4是用第四种方法构造的生成树，而令T是一棵廉价的生成树。假设$T\neq T_4$，而且令xy为被T_4选取的第一条不在T中的边，我们选取边xy，是因为它是联结T_4的子树F的一个顶点与F之外的一个顶点的费用最小的边。在T中的$x—y$路上有一条边uv联结F的一个顶点与F外的一个顶点，因此，$f(xy)<f(uv)$。

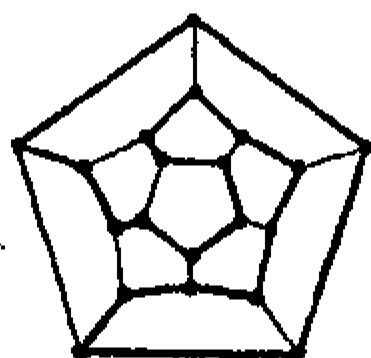
但这是不可能的，因为$T'=T-uv+xy$是G的一棵生成树，而且$f(T')<f(T)$，所以$T=T_4$，这就证明了T_4必是廉价的生成树。并且，因为用第四种方法构造的生成树是唯一的，故若没有两条边有相同的费用，其廉价的生成树是唯一的。

§3 哈密顿圈和尤拉回路

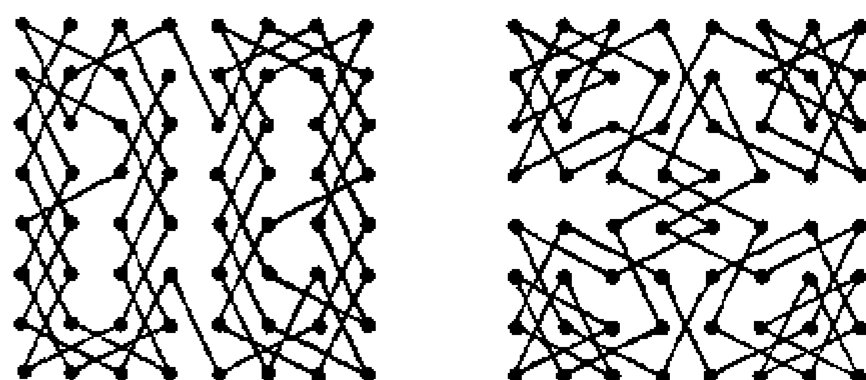
所谓**货郎担问题**很类似于上节讨论的廉价的生成树问题，但这种类似只是表面的。一个货郎要走遍几个城市，最后返回到他出发的总公司。任何两个城市之间的旅行费用是已知的，要找出一个有效的算法，来寻求一条费用最低的旅行路线。（因为这里不讨论算法问题，我们对“有效”这一术语不作具体解释；粗略地说，如果一个算法的计算次数以顶点数目的一个多项式为界，则说这个算法是有效的。）这个问题的解法有重要的应用价值，所以虽然对此已做了大量的研究工作，但费用最低的旅行路线的有效算法是否存在还不清楚。

在货郎担问题的另一种说法中，旅行路线要求是一个圈，即不允许货郎对同一个城市访问两次（除总公司所在的城市之外）。如果一个圈包含一个图的所有顶点，则称它为该图的一个**哈密顿圈**。这个词起源于1857年哈密顿爵士所发明的一种游戏，它要求在正十二面体的图中，构造一个包含其所有顶点的圈（见图Ⅰ.9）。一个图的一条**哈密顿路**是一条包含该图的所有顶点的路。包含哈密顿圈的图称为**哈密顿图**。

实际上，在哈密顿提出他的游戏之前，对在特殊图中的哈密顿圈和路已经研究得很多了，特别是尤拉在1759年对国际象棋棋盘上的马步问题进行的充分的研究，在此问题中，考虑一个图，其顶点是国际象棋棋盘上的64个方格，而如果马可以从一个方格跳向另一个方格，则这两个方格对应的顶点邻接。这个问题是要在该图中求一个哈密顿圈，图Ⅰ.10。给出了这个难题的两个解。



图Ⅰ.9。在正十二面体的图中的哈密顿圈。



图Ⅰ.10。在国际象棋棋盘上马的两条行走路线。

如果在货郎担问题的第二种更特殊的说法中，仅有两种旅行费用1和∞（表示不能走的路线），则问题是在由旅行费用为1的边构成的图中，是否存在哈密顿圈。甚至这种特殊情形的货郎担问题也没有解决：不但构造哈密顿圈还没有有效算法，而且连这种算法是否存在还都不知道。

如果任何两个城市之间的旅行费用相同，那么我们的货郎不难找到费用最小的旅行路线：只要把$n-1$个城市（第

n 个城市是总公司所在的地）按任意次序排列起来就行。因为现在他有了这种自由，所以我们的货郎决定把他自己的责任和兴趣结合起来，并决定在还有他没有走过的路线 uv 时，他不再走走过的路线 xy。他能作到吗？为了设计我们的货郎所要求的旅行路线，必须把 K^n 分解成若干个边不重的哈密顿圈的并。对于什么样的 n 值，这种分解才是可能的呢？因为 K^n 是 $(n-1)$ 正则的，而哈密顿圈是 2—正则的，故必要条件是 $n-1$ 为偶数，即 n 为奇数。这个必要条件也可由下面的事实得到：$e(K^n)=\frac{1}{2}n(n-1)$，而哈密顿圈包含 n 条边，故 K^n 必为 $\frac{1}{2}(n-1)$ 个哈密顿圈的并.

现在假设 n 是奇数，$n\geqslant 3$，删去 K^n 的一个顶点，我们可以看出，如果 K^n 是 $\frac{1}{2}(n-1)$ 个哈密圈的并，K^{n-1} 就是 $\frac{1}{2}(n-1)$ 条哈密顿路的并。（事实上，如果 K^{n-1} 是若干条哈密顿路的并，因为 $e(K^{n-1})=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，而 K^{n-1} 中的哈密顿路有 $n-2$ 条边，故 $n-1$ 必为偶数.）按图 Ⅰ.1 的提示，读者可以证明，对奇数 n，图 K^{n-1} 的确是 $\frac{1}{2}(n-1)$ 条哈密顿路的并. 在把 K^{n-1} 分解成 $\frac{1}{2}(n-1)$ 条哈密顿路的这种分解中，每个顶点恰好是一条哈密顿路的端顶点，（事实上，上述断言对将 K^{n-1} 分解成 $\frac{1}{2}(n-1)$ 条边不重的哈密顿路的每个分解都成立，因为 K^{n-1} 的每个顶点 x

的度为奇数，故必至少有一条哈密顿路终止于 x。）因此，如果我们在 K^{n-1} 中添加一个新顶点，并把 K^{n-1} 中的每条路补成 K^n 中的一个哈密顿圈，则我们得到把 K^n 分解成 $\frac{1}{2}(n-1)$ 个边不重的哈密顿圈的分解。这样我们就证明了下面的结果。

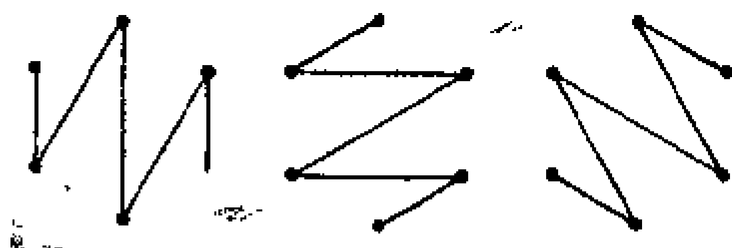


图 I.11. 在 K^6 中的三条边不重的哈密顿路.

定理 9. 当 $n\geqslant 3$ 时，完全图 K^n 能分解成若干个边不重的哈密顿圈当且仅当 n 是奇数。当 $n\geqslant 2$ 时，完全图 K^n 能分解成若干条边不重的哈密顿路当且仅当 n 是偶数。

上面的结果表明，如果 $n\geqslant 3$ 是奇数，则可以把 K^n 中的 $\frac{1}{2}(n-1)$ 个边不重的哈密顿圈串接起来，得到包含 K^n 的所有边的一条回路。一般说来，一个图 G 中包含其所有边的一条回路称为 G 的一条**尤拉回路**，同样，包含所有边的一条迹被称为**尤拉迹**，如果一个图有尤拉回路，则称该图为**尤拉图**。尤拉回路和尤拉迹是以

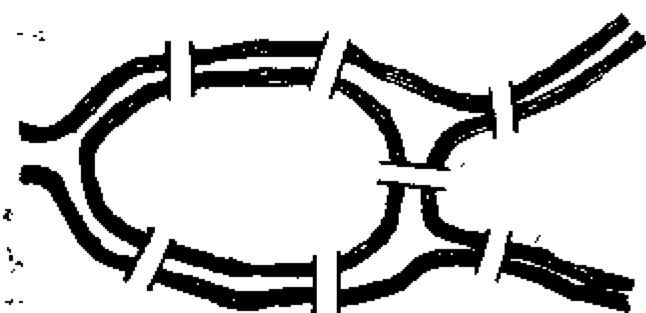
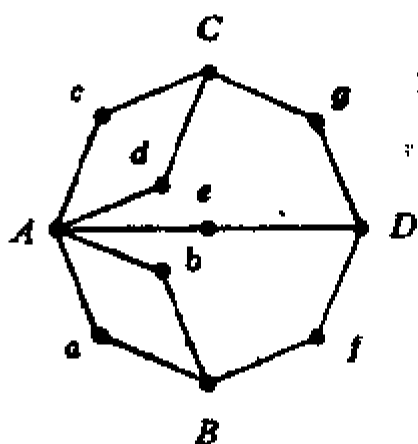


图 I.12. 哥尼斯堡的普雷格尔河上的七座桥。

L.尤拉的名字命名的，尤拉在1736年指出了包含尤拉回路和迹的图的特征。当时，尤拉是圣彼得堡的数学教授，而他由于对流经古老的普鲁士城市哥尼斯堡(自1944年划归苏联，命名为加里宁格勒)的普雷格尔河上的七桥问题发生了兴趣，开始对这一问题的研究。这个问题是：能否有人走过所有七座桥而不重复？

显然，这样的走法存在当且仅当图Ⅰ.13.中的图有尤拉迹。



图Ⅰ.13. 哥尼斯堡桥的图.

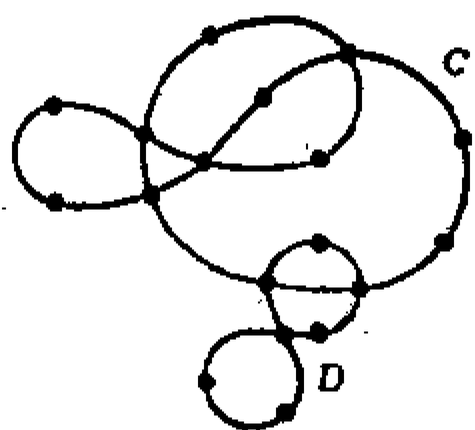
定理 10. 非平凡的连通图有尤拉回路当且仅当其每个顶点的度均为偶数。一个连通图有从顶点 x 到顶点 $y\neq x$ 的尤拉迹当且仅当只有 x 和 y 的度是奇数。

证明： 这个条件显然是必要的，例如，如果 $x_1x_2\cdots x_m$ 是 G 中的一条尤拉回路，而 x 在序列 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 中出现 k 次，则 $d(x)=2k$。

我们利用对边数归纳法来证明第一个条件的充分性．如果不存在边，则不需要证明什么，从而我们开始归纳步骤。

令 G 是非平凡的连通图，而其每个顶点的度均为偶数。因为 $e(G)\geqslant 1$，我们知道 $\delta(G)\geqslant 2$，故根据推论7，G 包含圈．令 C 是 G 中的具有最多边的一个回路。假设 C 不是尤拉回路，因为 G 是连通的，C 包含一个顶点 x，它在 $G-E(C)$ 的一个非平凡的分支 H 中。H 的每个顶点在 H 中的

度均为偶数，故根据归纳假设，H 包含一个尤拉回路 D。回路 C 和 D（见图Ⅰ.14）是边不重的。且有一个公共顶点，故能把它们串接起来，构成一个比 C 有更多边的回路。这与 $e(C)$ 的最大性矛盾，所以 C 是尤拉回路。

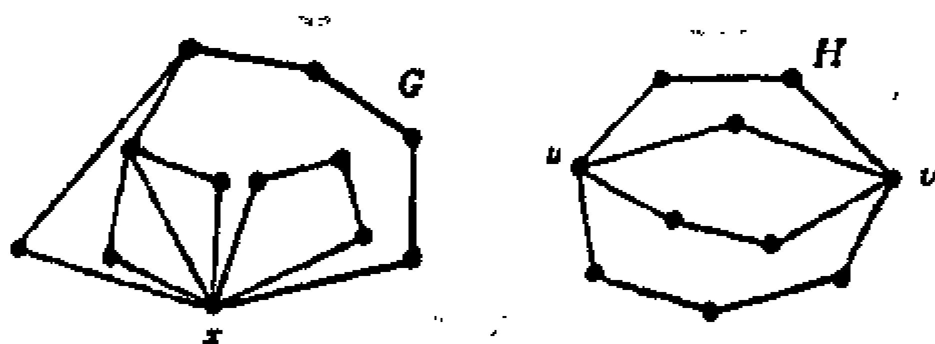


图Ⅰ.14. 回路 C 和 D.

现在，假设 G 是连通的，且 x 和 y 是仅有的度为奇数的顶点。令 G^* 是在 G 中添加一个顶点 u 和两条边 ux 和 uy 所得到的图，则根据第一部分，G^* 有尤拉回路 C^*.显然，$C^*—u$ 是从 x 到 y 的尤拉迹。

定理10表明，不存在满足哥尼斯堡桥问题的条件的通道，因为在图Ⅰ.13. 的图中有四个度数为奇数的顶点。

展览会走廊的设计问题也容易翻译成图：边对应于走廊，而顶点对应于几条走廊的相交点。如果入口即是出口，参观者可沿每条走廊恰好走一次当且仅当对应的图有尤拉回路。一般来说，为了达到这一目的，参观者必须有个计划：他不能见到任何一条没有走过的走廊就走这条走廊。但是。在设计巧妙的（1 ）展览中，参观者确实能看到所有展品，而不沿同一走廊走两次，直到他的前面再无新展品为止。这样的展览对应的图称为以对应于入口（也是出口）的顶点为起点的**随机尤拉图**，见图Ⅰ.15. 中的两个例子。随机尤拉图的特征也是很容易给出的（练习 24—26）。



图Ⅰ.15. G是以x为起点的随机尤拉图，H是以v或v为起点的随机尤拉图。

§4 可平面图

展览会走廊的图是**可平面图**：可以把它画在平面上，使它没有两条边是相交的，更准确地说，一个可平面图可以画在平面上，使其不同的顶点对应平面上不同的点，而其边对应平面上联结相应的两个点的简单约当曲线，且使每两条不同的曲线不相交或仅交于一个公共端点，一个图的如上所述的表示称为一个**平面图**。

有一种把一个拓扑空间同一个图联系起来的简单的方式，它引出平面性的另一个定义，这个定义与上面的定义显然等价。令p_1，p_2，…，p_n是3—维欧几里得空间$\mathbf{R}^3$中的不同的点，而$\mathbf{R}^3$中的每个平面至多包含这些点中的三个点，把具有端点p_i和p_j的直线段（开的或闭的均可）写成(p_i, p_j)。给定一个图$G=(V, E)$，$V=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，拓扑空间

$$R(G)=\bigcup\{(p_i, p_j): x_ix_j\in E\}\cup\bigcup_{i}^{n}p_i\subset\mathbf{R}^3$$

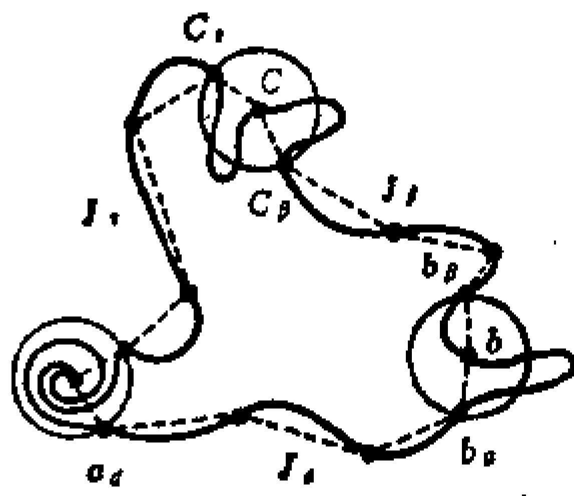
称为 G 的一个**实现**。如果 $R(G)$ 同胚于平面 $\mathbf{R}^2$ 的一个子集，则称图 G 是**可平面的**。

我们对 $R(G)$ 再作进一步的说明，图 H 称为图 G 的一个**细分**，或一个**拓扑 G 图**，如果 H 是由 G 通过细分 G 的某些边得到的，即将 G 的某些边用至多与其有公共端点的路来代替。我们把拓扑 G 图写或 TG，这样，TG 表示相当大的一族图中的任何一个元素，例如，TK^3 是任意一个圈，而 TC^8 是长至少为 8 的任意一个圈。显然，对任意一个图 G，空间 $R(G)$ 和空间 $R(TG)$ 是同胚的，如果 $R(G)$ 同胚于 $R(H)$，或者换句话说，G 和 H 有同构的加细，则说图 G **同胚**于图 H。

初一看，我们可能会想到，在可平面图的研究中，我们也许会遇到拓扑方面的困难，实际上不是这种情况。显而易见，对应于边的约当曲线可以假设是折线，更精确地说，每个平面图同伦于表示同一个图的一个平面图，在其中约当曲线是逐段线性的。事实上，给定一个平面图，令 $\delta>0$ 小于两个顶点间最小距离的一半。对于每一个顶点 a，放一个中心在 a 半径为 δ 的闭圆盘 D_a。用 J_α 表示对应于边 $\alpha=ab$ 的曲线，令 a_α 是沿 J_α 从 a 走向 b 时在 D_a 中的最后一点。用 J'_α 表示 J_α 的从 a_α 到 b_α 的部分。令 $\varepsilon>0$ 是这样的一个数，如果 $\alpha\neq\beta$，则 J'_α 和 J'_β 的距离大于 3ε。根据约当曲线的一致连续性，每个 J'_α 可在 ε 范围内用从 a_α 到 b_α 的折线 J''_α 来逼近。为了得到原图要求的逐段线性的表示，只要把每个 J_α 用 J''_α 及线段 aa_α 和 $b_\alpha b$ 串接成的折线代替即可（见图Ⅰ.16）

经过不太复杂的论证就可以表明，每个可平面图都有直线段表示：可把它画在平面上，使其边皆为直线段（练习28）。

如果我们从平面上略去平面图 G 的顶点和边，剩下的部分就分成若干个连通部分，每一个部分称为一个**面**。显然，每个平面图都有一个无界面。一个面的**边界**是其闭包中的边的集合。因为一个圈



图Ⅰ.16. 构造逐段线性的表示。

（它是简单闭曲线）把平面上的点分成两个部分，故一个圈的每一条边在两个面的边界上。一个平面图与它所确定的面的集的总体称为一个**平面地图**，平面地图的面通常称为**国家**，如果两个国家的边界有公共边，则说它们是**相邻的**。

如果把一个凸多面体的图画在平面上，则这个多面体的各个面显然对应于相应平面图的各个面。这把我们引向 L. 尤拉对图论的另一个贡献，即**尤拉多面体定理**，或简称**尤拉公式**。

定理 11. 如果一个连通的平面图 G 有 n 个顶点、m 条边和 f 个面，则有

$$n-m+f=2.$$

证明： 我们对面数进行归纳. 如果 $f=1$，则 G 不包含圈，因此它是树，结论成立。

现在假设 $f>1$，而且对 f 的较小的值结论成立。令 ab

是 G 中的一个圈上的一条边。因为圈分割平面，故边在两个面 S 和 T 的边界上。去掉 ab，在新的平面图 G' 中，S和 T 联成一个新面，而 G 的所有其它的面保持不变。这样，如果 n'、m' 和 f' 是 G' 的参数，则 $n'=n$，$m'=m-1$，$f'=f-1$，因此 $n-m+f=n'-m'+f'=2$。 □

令 G 是有 n 个顶点、m 条边和 f 个面的连通平面图，并且，用 f_i 表示其边界恰有 i 条边的面的数目，当然

$$\sum_i f_i = f, \tag{3}$$

而若 G 没有桥，又因为每条边都在两个面的边界上，则

$$\sum_i i f_i = 2m. \tag{4}$$

式 (3),(4)和尤拉公式给出了 n 阶可平面图的边数的一个上界。如果图的**围长**，即最短圈中的边数(无圈图的围长定义为∞)很大时，这个界可以改进。

定理 12: 阶为 $n\geqslant 3$ 的可平面图至多有 $3n-6$ 条边。并且，阶为 n、围长至少为 g ($3\leqslant g<\infty$) 的可平面图的级至多为

$$\max\left\{\frac{g}{g-2}(n-2),\ n-1\right\}.$$

证明：第一个断言是第二个断言在 $g=3$ 时的情形，因此，只要证明第二个断言即可。令 G 是阶为 n，级为 m 而围长至少为 g 的可平面图。如果 $n\leqslant g-1$，则 G 是无圈的，因此 $m\leqslant n-1$。现在，假设 $n\geqslant g$，且对 n 的较小值断言成立，不失一般性，可以假设 G 是连通的。如果 ab 为一个桥，

则 $G-ab$ 是两个顶点不重的子图 G_1 和 G_2 的并。记 $n_i=|G_i|$，$m_i=e(G_i)$，$i=1, 2$，根据归纳假设，我们得到

$$m=m_1+m_2+1\leqslant\max\left\{\frac{g}{g-2}(n_1-2),\ n_1-1\right\}$$

$$+\max\left\{\frac{g}{g-2}(n_2-2),\ n_2-1\right\}+1$$

$$\leqslant\max\left\{\frac{g}{g-2}(n-2),\ n-1\right\}.$$

另一方面，如果 G 无桥，(3) 和(4) 蕴含

$$2m=\sum_i if_i=\sum_{i\geqslant g} if_i\geqslant\sum_i gf_i=gf.$$

因此，由尤拉公式得

$$m+2=n+f\leqslant n+\frac{2}{g}m,$$

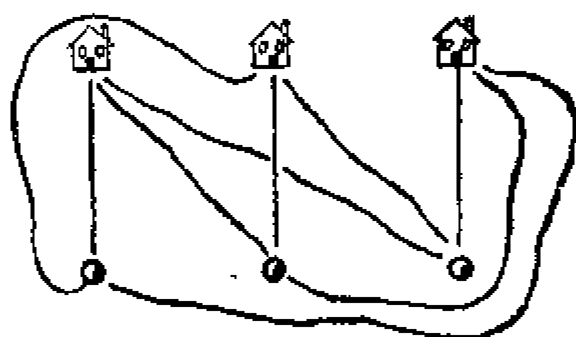
故

$$m\leqslant\frac{g}{g-2}(n-2). \qquad \square$$

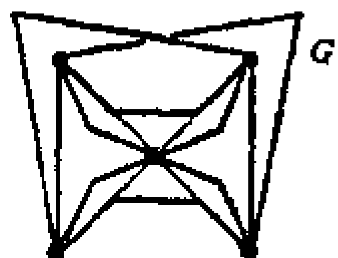
定理 12 常用来证明某些图是不可平面图，于是，5 阶完全图 K^5 是不可平面图，这是因为$e(K^5)=10>3(5-2)$，完全 3—3 二部图 $K^{3,3}$ 也是不可平面图，这是因为其围长为 4，而 $e(K^{3,3})=9>\left(\frac{4}{4-2}(6-2)\right)$. $K^{3,3}$ 的不可平面性蕴含着用不相交的路把三栋房子的每一栋与三口井的每一口联结起来是不可能的意思。这是一个有名的难题（见图Ⅰ。17）。

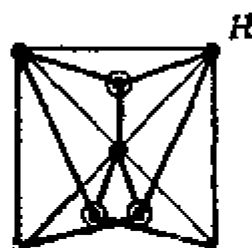
如果图 G 是不可平面的，则每个拓扑 G 图和每个包

含拓扑G图的图也是不可平面的，这样，图Ⅰ.18。中的图都是不可平面的，因为它们分别包含TK^5和$TK^{3,3}$。


图Ⅰ.17. 三栋房子和三口井.

令人惊奇的是，上述注的逆也成立。这个绝妙的结果是库拉托夫斯基在1930年证明的，这个证明虽然是初等的，但相当长，在此处我们就不讲了。





图Ⅰ.18. G包含TK^5，H包含$TK^{3,3}$.

定理 13. 一个图是可平面的当且仅当它不包含K^5和$K^{3,3}$的细分。 □

§5 尤拉迹在代数中的一个应用

在结束这一章时，我们要指出，可以使用诸如到目前为止我们介绍的简单概念，来证明重要的结果。我们要证明的结果是 Amitsur 和 Levitzki 关于多项式恒等的基本定理。环S中的两个元素a和b的**换位子**是$[a,b]=ab-ba$.同样，如果$a_i\in S$，$1\leqslant i\leqslant k$，我们记

$$[a_1,a_2,\cdots,a_k]=\sum(-1)^{\sigma}a_{\sigma 1}a_{\sigma 2}\cdots a_{\sigma k},$$

此处求和是对整数 $1,2,\cdots,k$ 的所有排列 σ 进行的。如果对所有 $a_i\in S$，$1\leqslant i\leqslant k$，有 $[a_1, a_2, \cdots, a_k]=0$，则说 S 满足 k——**多项式恒等式**。Amitsur 和 Levitzki 定理说：元素在可换环 R 中的 $k\times k$ 矩阵环 $M_k(R)$ 满足 $2k$——多项式恒等式。

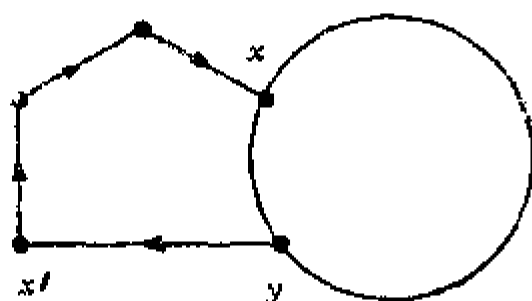
定理 14. 令 R 是一个可换环，而令 $A_1, A_2, \cdots, A_{2k}\in M_k(R)$，则 $[A_1, A_2, \cdots, A_{2k}]=0$。

证明： 我们用一个关于有向重图中尤拉迹的引理来证明这个定理。令 G 是具有边 $e_1, e_2, \cdots, e_m$ 的一个 n 阶有向重图，即每条边 e_i 是不必不同的顶点的有序对。每条（有向的）尤拉迹 P 等同于 $\{1,2\cdots,m\}$ 的一个排列是不困难的，令 $\varepsilon(P)$ 为这个排列的符号。给定 $\vec{G}$ 的两个顶点 x、y（它们不必不同），置 $\varepsilon(\vec{G}; x,y)=\Sigma_P\varepsilon(P)$，此处求和是对从 x 到 y 的所有尤拉迹进行的。

引理 15. 如果 $m\geqslant 2n$，则 $\varepsilon(\vec{G}; x,y)=0$。

在证明此引理之前，我们来看一下，如何把它应用于定理 14 的证明。记 $E_{ij}\in M_n(R)$ 是仅其第 i 行第 j 列的元素非零且为 1 的矩阵。因为对每个变量，$[A_1,A_2,\cdots,A_{2n}]$ 是 R——线性的，而 $\{E_{ij}: 1\leqslant i,j\leqslant n\}$ 是 $M_n(R)$ 的作为 R——模的基，故只要对每个 k 有 $A_k=E_{i_kj_k}$ 时证明定理 14 即可。此时，令 $\vec{G}$ 是有顶点集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个有向重图，其有向边的集是 $\{i_1j_1,i_2j_2,\cdots,i_{2n}j_{2n}\}$。根据矩阵乘法的定义，如果对应的边序列是从 i 到 j 的（有向的）尤拉迹，乘积 $A_{\sigma 1}A_{\sigma 2}\cdots A_{\sigma 2n}$ 是 E_{ij}；否则，乘积为零。因此 $[A_1,$

$A_2, \cdots, A_{2n}] = \sum_{j}\sum_{i} \varepsilon(\vec{G}; i, j) E_{ij}$，根据引理 15，每一个加项均为 O，因此和也是 O。



图Ⅰ.19. $\vec{G}'$ 的构造.

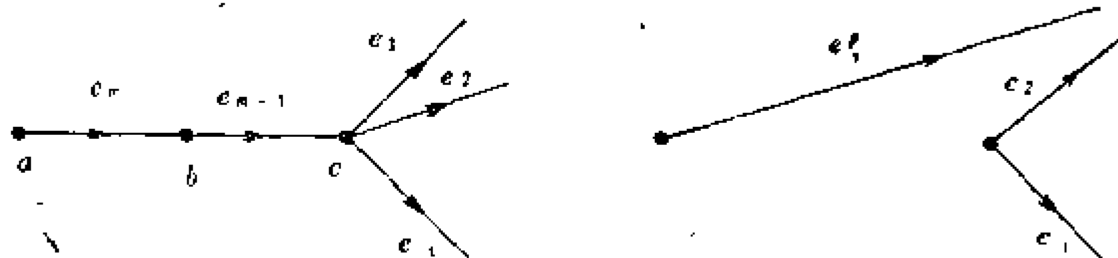
引理 15 的证明：显然，我们可以假设 $\vec{G}$ 无孤立顶点。在 $\vec{G}$ 中添加一个顶点 x'，一条从 x' 到 x 的长为 $m+1-2n$ 的路和一条从 y 到 x' 的边，得到图 $\vec{G'}$（见图Ⅰ.19）。则 $\vec{G'}$ 有阶 $n+(m+1-2n)=m+1-n$ 和级 $m+m+1-2n+1=2(m+1-n)$。并且，容易验证，$|\varepsilon(\vec{G}; x, y)| = |\varepsilon(\vec{G'}; x', x')|$。因此，只要对 $m=2n$ 和 $y=x$ 证明定理即可。

给定一个顶点 z，令 $d^+(z)$ 是由 z 发出的边数，$d^-(z)$ 是指向 z 的边数，称 $d(z)=d^+(z)+d^-(z)$ 为 z **的度**，而称 $f(z)=d^+(z)-d^-(z)$ 为 z 的**流量**。我们可以假设 $\vec{G}$ 包含一个尤拉回路（从 x 到 x 的尤拉迹），因为不然的话，没有任何东西需要证明。在这种情形，每个顶点有流量 0，而且每个顶点的度是至少为 2 的偶数。并且，我们可以假设不存在重边（故无重自环），因为否则断言是平凡的。

为了对 $m=2n$ 和 $x=y$ 的情形证明引理，我们对 n 归纳。$n=1$ 这种情形是平凡的，我们转向归纳步骤。要区分三种情形。

(i) 存在一个 2 度的顶点 $b \neq x$，比如说 $e_m = ab$ 终止于 b，而 $e_{m-1} = bc$ 始于 b。如果 $a=c$，把归纳假设应用于 $\vec{G}-b$，

就证明了引理的断言。如果 $a \neq c$，不失一般性，设 $x \neq c$。令 $e_1 = cc_1$，$e_2 = cc_2$，$\cdots$，$e_t = cc_t$ 是始于 c 的各条边。对于每个 i，$1 \leqslant i \leqslant t$，由 $\overrightarrow{G} - b$ 中删除 e_i，而添加 $e'_i = ac_i$，构造图 $\overrightarrow{G}_i$（见图Ⅰ.20）。则 $\varepsilon(\overrightarrow{G};\ x, x) = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon(\overrightarrow{G}_i; x,\ x) = 0$。



图Ⅰ.20. $\overrightarrow{G}_1$ 的构造.

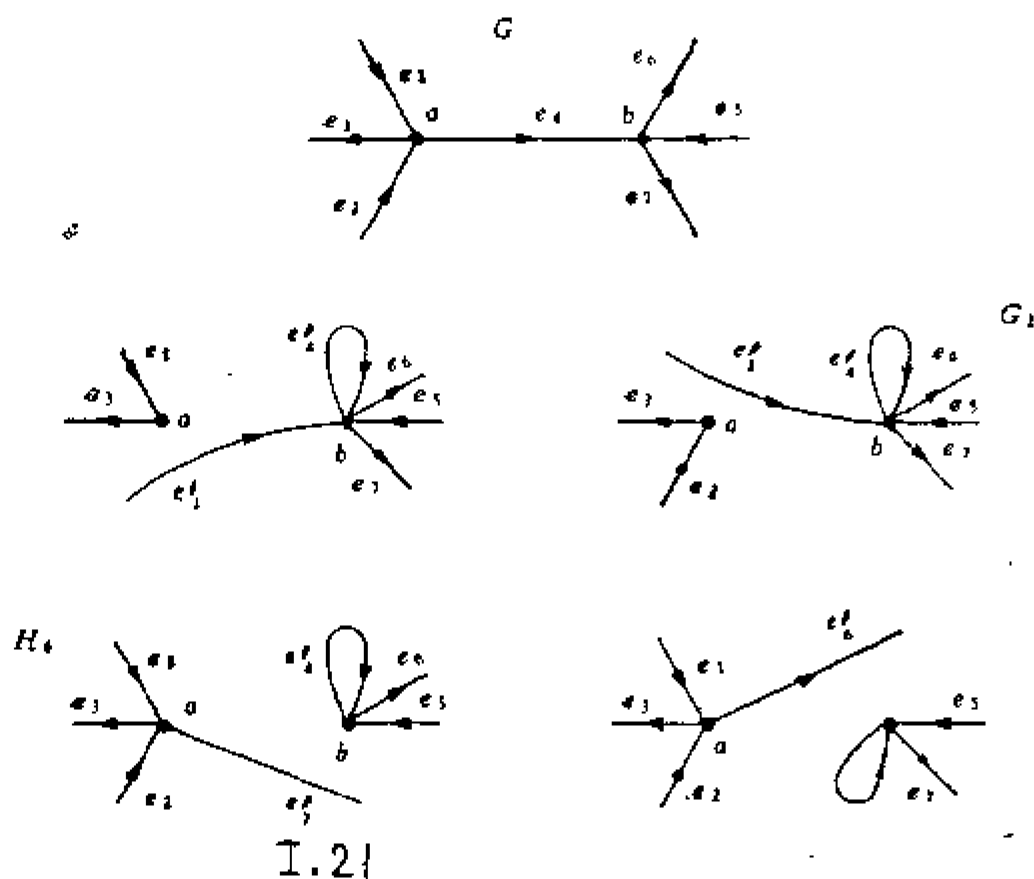
(ii) 在一个 4 度顶点 $b \neq x$ 处存在一个自环。令 e_m 是在 b 处的自环，而 $e_{m-2} = ab$ 和 $e_{m-1} = bc$ 是在 b 处的另外两条边。在 $\overrightarrow{G} - b$ 中添加一条边 $e'_{m-2} = ac$，得到 $\overrightarrow{G}_0$。则 $\varepsilon(\overrightarrow{G};\ x,\ x) = \varepsilon(\overrightarrow{G}_0;\ x,\ x) = 0$。

(iii) 情形(i)和(ii)不适用。因为 $m = 2n - \frac{1}{2}\Sigma_1^n d_i$，而每个与 x 不同的顶点的度至少为 4，故或者每个顶点的度均为 4，或者 $d(x) = 2$，存在一个 6 度的顶点，而所有其它顶点的度均为 4。很容易就可以验证出(见练习 34)存在两个 4 度的邻接顶点 a 和 b，因为不然的话(ii)成立。现在，我们应用第四个，即最后一个图变换。这比前面的一些更为复杂，因为我们将由 $\overrightarrow{G}$ 构造两对本质上不同的图：图 $\overrightarrow{G}_1$，$\overrightarrow{G}_2$，$\overrightarrow{H}_6$ 和 $\overrightarrow{H}_7$，如图Ⅰ.21 所示。在 $\overrightarrow{G}$ 中，从 x 到 x 的每条尤拉迹变成恰在 $\overrightarrow{G}_1$ 和 $\overrightarrow{G}_2$ 之一中的一条尤拉迹。但是，因为 $\overrightarrow{G}_1$ 包含

一些多出来的尤拉迹：不是由$\overrightarrow{G}$中的尤拉迹变来的尤拉迹。因为这种尤拉迹是恰在$\overrightarrow{H}_6$和$\overrightarrow{H}_7$之一中的尤拉迹，而且，它们用尽了$\overrightarrow{H}_6$和$\overrightarrow{H}_7$中的所有尤拉迹，我们求得：

$$\varepsilon(\overrightarrow{G};\ x,\ x)=\sum_{i=1}^{2}\varepsilon(\overrightarrow{G}_i;\ x,\ x)-\sum_{i=6}^{7}\varepsilon(\overrightarrow{H}_i;\ x,x)。$$

根据(i)，前两项为0；而根据(ii)，后两项为0，因此$\varepsilon(\overrightarrow{G};\ x,x)=0$，这就完成了引理15的证明。



图Ⅰ.21. 图$\overrightarrow{G_1}$，$\overrightarrow{G_2}$，$\overrightarrow{H_6}$和$\overrightarrow{H_7}$.

练　　习

1. (i) 证明：每个图都包含两个度相等的顶点。

(ii) 决定具有一对度相等的顶点的所有图。

2⁻. 证明：不连通图的补图是连通的。

3⁻. 证明：在图 G 中存在圈的一个集，使 G 的每条边恰好属于这些圈之一当且仅当 G 的每个顶点的度均为偶数。

4. 证明：在具有可数条边的无限图 G 中存在圈的一个集，使 G 的每条边恰好属于这些圈之一当且仅当对每个 $X \subset V(G)$，联结 X 与 $V(G)-X$ 的边集包含偶数条或无限条边。

5. 证明：$d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n$ 是一棵树的度序列当且仅当

$d_1 \geqslant 1$ 和 $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$。

6. 证明：每个满足条件 $d_1 \geqslant 1$ 和 $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2k$、$k \geqslant 1$、

的整数序列 $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n$ 都是具有 k 个分支的一个 n 阶森林的度序列。

7. 指出森林的度序列的特征。

8. 证明：至少为 2 度的正则二部图没有桥。

9. 令 G 是一个 n 阶图，证明下列各断言是等价的。

(i). G 是一棵树。

(ii). G 是连通的，且有 $n-1$ 条边。

(iii). G 是无圈的，且有 $n-1$ 条边。

(iV). 对于 $n=1,2, G=K^n$；如果 $n\geqslant3$，则 $G\neq K^n$，且在 G 中添加一条边，G 中恰好产生一个新圈。

10. 令 $\mathbf{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是具有 $n(n\geqslant1)$ 个元素的集 X 的 n 个不同子集的一个族。定义一个图 G，其顶点集为族 $\mathbf{A}$，而 A_iA_j 是一条边当且仅当存在 $x\in X$，使 $A_i\triangle A_j=\{x\}$。把边 A_iA_j 标记作 x。对于 $H\subset G$，令 $\mathrm{Lab}(H)$ 是对 H 的边的标记的集。证明：存在森林 $F\subset G$，使 $\mathrm{Lab}(F)=\mathrm{Lab}(G)$。

11.（续第10题）由上一练习的结果推出：存在元素 $x\in X$，使集 $A_1-\{x\}$，$A_2-\{x\}$，$\cdots$，$A_n-\{x\}$ 全都不同，证明：如果 $|\mathbf{A}|=n+1$，这个结末必对任何 n 都成立。

12. 竞赛图是一个完全有向图，即对于其中任意两个不同的顶点 x 和 y，或存在一条从 x 到 y 的边，或存在一条从 y 到 x 的边，但不是二者都存在，证明：每个竞赛图都包含（有向的）哈密顿路。

13$^-$. 令 G 是一个 n 阶连通图，且令 $1\leqslant k\leqslant n$，证明：G 包含一个 k 阶连通子图。

14$^-$. 证明：图的半径和直径满足不等式：

$$\mathrm{rad}G\leqslant\mathrm{diam}G\leqslant2\mathrm{rad}G,$$

而且，此不等式中的两个等号都可能成立。

15$^-$. 给定 $d\geqslant1$，确定

$$\max_{\mathrm{diam}G=d}\min\{\mathrm{diam}T: T \text{ 是 } G \text{ 的一棵生成树}\}。$$

16. 用$\beta_0(G)$表示G中独立顶点的最大数目，证明：如果G不包含三角形，则$\Delta(G)\leqslant\beta_0(G)$，并导出$e(G)\leqslant\frac{1}{2}n\beta_0(G)$，此处$n=|G|$。

17. 证明：如果对于一个有向图的每个顶点z，都存在始于z的边（即$d^+(z)>0$），则该图包含（有向）圈。

18. 有向图$\vec{G}=(V,\vec{E})$的一个**级配**是V的一个划分$V_1,V_2,\cdots,V_k$，使得当$xy\in\vec{E}$时，则对某个i，$x\in V_i$，$y\in V_{i+1}$。

给定一个有向图$\vec{G}$和一条（无向的）路$P=x_0x_1\cdots x_s$，用$v(x_0,x_s;P)$表示边$\overrightarrow{x_ix_{i+1}}$的数目减去边$\overrightarrow{x_{i+1}x_i}$的数目。证明：$G$有级配当且仅当对每对顶点$x_0$和$x_s$，$v(x_0,x_s;P)$与$P$无关。

19. 详细证明用第二种和第三种方法可构造廉价的生成树，以完成定理8的证明。

20. 写出定理8中的第四种方法怎样用来寻求存在几条费用相同边时的廉价的生成树（见图Ⅰ.4）。

21. 证明：每个廉价的生成树都可用前三种方法中的每一种来构造。

22. 由定理10导出：一个图包含尤拉回路当且仅当至多除了一个分支之外，所有分支都是孤立顶点，而且每个点的度均为偶数。叙述并证明存在从x到y的尤拉迹的类似命题。

23. 寻求图G中的尤拉回路$x_1x_2\cdots x_n$的下面的算法属于Fleury：任选一个顶点x，若已选定了$x_1,x_2,\cdots,x_k$，记

$G_k = G - \{x_1x_2, x_2x_3, \cdots, x_{k-1}x_k\}$.如果$x_k$在$G_k$中是孤立顶点，算法终止，否则，令$x_{k+1}$在$G_k$中邻接于$x_k$，并且$x_kx_{k+1}$不是桥，除非$G_k$中的与$x_k$关联的每条边都是桥。

证明：如果G有尤拉回路，则由以上算法构造的迹$x_1x_2\cdots x_l$是一个尤拉回路。

24. 如果始于图G的顶点x的任意极大迹都是尤拉回路，就说图G是以x为起点的**随机尤拉图**。(如果$T = xx_1\cdots x_l$，T是始于x的极大迹当且仅当x_l是$G-E(T)$中的孤立顶点)。证明：非空图G是以x为起点的随机尤拉图当且仅当G有尤拉回路且x包含在G的每个圈中。

25. 令F是一个森林，把一个顶点x添加到F中，并把F的每个奇度顶点与x联结起来。证明：用这种方法得到的图是以x为起点的随机尤拉图。

26. 证明：图G既是以顶点x也是以顶点y为起点的随机尤拉图当且仅当G是偶数条x——y路的并，这些路中的任何两条仅有公共顶点x和y。

27. 怎样定义一个面的边界上的边数，能使公式(4)对于具有桥的图也成立？相应地改写定理12的证明。

28[+]. 证明：每个可平面图能画在平面上，使其中的每条边都是直线段。〔提示：删去一个适当的顶点，对极大可平面图的阶数用归纳法。〕

29. 一个无限图的平面图与有限图一样定义，但要满足下列附加条件：每个点有一个邻域，其中包含至多一个顶点x，且仅与关联于x的边相交。

证明：库拉托夫斯基定理对无限图不成立，即可构造一个不包含TK^5和$TK^{3,3}$的无限不可平面图。

存在不包含TK^4的无限不可平面图吗？

30. 令$d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n$是一个可平面图的度序列。

(i) 利用$\sum_{i=1}^{n} d_i$的一个上界证明：如果$d_1 \geqslant 4$，则

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 < 2(n+3)^2 - 62。$$

(ii) 用对n的归纳法证明：如果$n \geqslant 4$，则

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \leqslant 2(n+3)^2 - 62。$$

证明：对每个$n \geqslant 4$，上面等式的等号都能成立。

31⁺. 确定$\sum_{i=1}^{n} d_i^2$的最大值。此处$d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n$是围长至少为4（即没有三角形）的一个可平面图的度序列。如果围长至少为$g > 4$，该最大值是多少？

32. 补齐引理15证明中的小缺陷，证明：如果情况(i)和(ii)都不适用，则存在两个4度的邻接顶点。

注

定理14见于K.Kuratowski,Sur le probleme des courbes gauches en topologie, Fund.Math.15(1930)271—283；一个较简单的证明可参看G.A.Dirac and S.Schuster, A theorem of Kuratowski, Indag. Math, 16(1954)343—348.

S. A. Amitsur 和 J. Levitzki的定理（定理14）见其文章：Minimal

dentities for algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 1(1950)449—433；本节中给出的证明基于 R. G. Swan, An application of graph theory to algebra Proc. Amer. Math. Soc. 14(1963)367—373 和 Correction to "An application of graph theory to algebra," Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1969) 379—380.

第 Ⅱ 章 电网络

这一章的内容有点脱离本书的主线，因此，一些读者可能希望跳过去不学，只有§3前半部分引入的一些概念将会在第Ⅶ章 §2 中用到。

我们很快就会发现，电网络可以看作是图，因此，有关网络中电流的一些最简单的问题，完全是关于图的问题。我们对图的简要了解有助于解决这一问题吗？本章第一节的回答是肯定的，因为只要把电学的基本概念简要地复习一下，我们就可以使用生成树来解。我们在§2中将会讲到，这些结果的一部分可以用划分矩形和正方形的形式重新加以阐述。最后一节引入初等代数图论，然后把它应用于电网络。

我们应该强调的是，在我们考虑的问题中使用的术语没有超出图论的范围，更确切地说，只使用了生成树的概念。

§1 图和电网络

一个简单的电网络可以看作是一个图，对其每一条边 e_i 指定一个实数 r_i，r_i 被称为**电阻**，如果在 e_i 的端点 a 和 b 之间存在**电位差** p_i，则**电流** w_i 将在边 e_i 中从 a 流向 b，它们满足**欧姆定律**：

$$w_i = \frac{p_i}{r_i}。$$

开始时，我们的注意可仅限于与图对应的电网络，但化

简以后，可以允许有重边，即要考虑重图，而不是仅仅考虑图。并且，我们要给每一条边指定一个方向，从而我们可以用 p_i 表示在边 e_i 中的电位差，即始点和终点之间的电位差。同样，w_i 是通过边 e_i 的电流，即 e_i 中与其方向相同的电流（注意，我们把负电流 $-w_i$ 看作在相反方向上的正电流。）这样，整个这一节我们考虑有向重图，即可能包含若干条从 a 到 b 的有向边的有向图。不过，我们在下一节中，用 ab 表示从 a 到 b 的边是不会发生混淆的；在下一节中，我们将作更准确的叙述。这样，

$$w_{ab}=-w_{ba},\quad p_{ab}=-p_{ba}。$$

在许多实际问题中，电流在一些点流入网络而在另一些点流出网络，而我们感兴趣的是各条边中的电流和电位差，它们服从著名的基尔霍夫定律（另一位有名的哥尼斯堡公民）。

基尔霍夫电位（或电压）定律说，绕任何圈的电位差的和为 0：

$$p_{x_1x_2}+p_{x_2x_3}+\cdots+p_{x_{k-1}x_k}+p_{x_kx_1}=0。$$

基尔霍夫电流定律要求，从任何点流出的总电流为 0：

$$w_{ab}+w_{ac}+\cdots+w_{au}+w_{a\infty}=0,$$

此处 ab，ac，…，au 是与 a 关联的边，而 $w_{a\infty}$ 表示从 a 点流出网络的电流的总量，（与我们的约定一致，$w_{\infty a}=-w_{a\infty}$ 表示在 a 点流入网络的电流总量）。对于不与外部点联结的点有

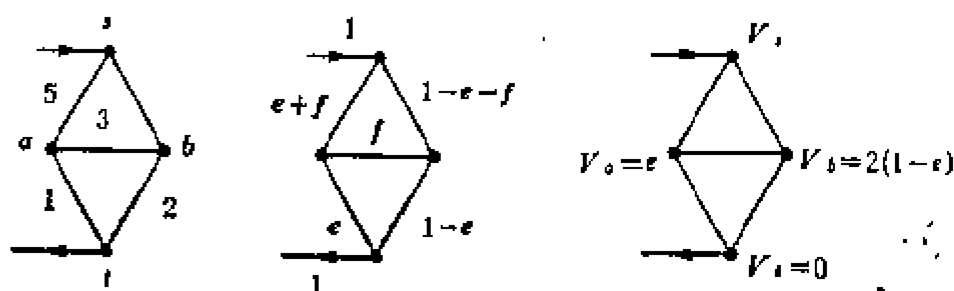
$$w_{ab}+w_{ac}+\cdots+w_{au}=0。$$

注意，如果我们知道电阻，则电流定律可以改写成对各

边中电流的约束，这样，我们可以认为，电流仅受基尔霍夫定律支配，网络的物理特征（电阻）仅影响这些定律中的参数。

显而易见，电位定律与下面的陈述是一致的：我们可以对顶点 a，b，…指定绝对电位 V_a，V_b，…，故 a 和 b 之间的电位差是 $V_a - V_b = p_{ab}$。如果网络是连通的，并给定各边的电位差 p_{ab}，则我们可以任意选取一个顶点的电位，比如说 V_a，而所有其余顶点的电位都被确定了。在这一节中，我们将解决电位问题，通常把某一顶点的电位取为 0，但是，我们必须记住，引入电位与应用电压定律是一样的。

在大多数基本问题中，电流只允许在一点 s 流入网络，这一点叫做**源**；而在另一点 t 流出，这一点叫做**汇**。（以后我们将说明，一般问题可以化为这些基本问题。）如果从 s 到 t 的电流的大小是 w，而在 s 和 t 之间的电位差是 p，则根据欧姆定律 $r = p/w$ 是在 s 和 t 之间的网络的**总电阻**。作为应用基尔霍夫定律的一个例子，我们计算在图Ⅰ.1所示的简单网络中 s 和 t 之间的总电阻。



图Ⅰ.1 .电阻，电流和电压.

如第一个图所示，这个网络有 5 个电阻，它们的值分别为 1，2，3，4 和 5 欧姆。如果假设一个单位电流在 s 点流

入系统而在 t 点流出，则对于适当的 e 和 f 的值，相应的各条边中的电流必如第二个图所示。最后，对各个顶点指定的电位 $V_t=0$，V_a，V_b，V_s 必须满足欧姆定律，因此，$V_a=1\cdot e=e$，$V_b=2(1-e)$ 和 $V_s=V_a+5(e+f)=6e+5f$。欧姆定律必在另外两条边 ab 和 bs 上满足，这样得出：

$$V_a=e=V_b+3f=2(1-e)+3f$$

和

$$V_s=6e+5f=V_b+4(1-e-f)$$
$$=2(1-e)+4(1-e-f)。$$

因此

$$e=2-2e+3f$$

和

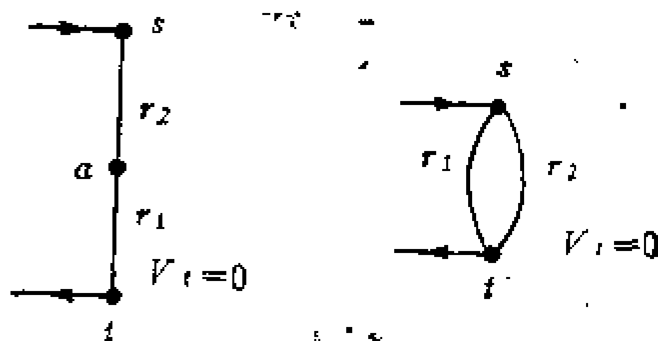
$$6e+5f=6-6e-4f,$$

这就得出 $e=4/7$，$f=-2/21$ 和 $V_s=6e+5f=62/21$，特别是，从 s 到 t 的总电阻是 $(V_s-V_t)/w=62/21$。

如果我们注意到对所有电流和电位差基尔霍夫方程是线性的和齐次的，计算常常可以化简。这蕴含下面的**叠加原理**：解的任何线性组合还是解。作为叠加原理的一个应用，我们可以证明，从多个源和汇产生的任何电流，可以用叠加属于一个源和一个汇的电流来求得，即上面讲述的基本问题的解可以用来解一般的问题。并且，叠加原理直接蕴含：不论源和汇如何分布，至多存在一个解。事实上，两个不同解的差是这样的流：在其中任何点没有电流流入或流出网络。如果在这个流中，从 a 到 b 的某条边中存在正电流，则根据电流定律，正电流必从 b 流向 c，然后从 c 流向 d，等等，

给出一条迹 $abcd\cdots$。因为网络是有限的，这条迹一定会返回到以前经过的某个点，这样，我们得到一个回路，在它的边中正电流向一个方向流。但这是不可能的，因为这蕴含：回路的每个顶点的电位严格大于其下一个顶点的电位。

在证明解的存在性以前（如果我们相信物理解释，这一点是明显的），我们来计算两个网络的总电阻。除了网络是很小的情形之外，计算是很复杂的，而电气工程师有若干标准技巧能使得这些计算简化。



图Ⅰ.2 串联和并联的电阻.

图Ⅰ.2 中的很简单的网络给出两个电阻 r_1 和 r_2，在第一个图中串联，在第二个图中并联。令通过网络的从 s 到 t 的电流的大小为 1，总电阻是多少？在第一种情形时

$$V_a=r_1 \text{ 和 } V_s=V_a+r_2=r_1+r_2,$$

故总电阻是

$$r=r_1+r_2.$$

在第二种情形，它们是并联的，如果通过第一个电阻的电流为 e，则通过第二个电阻的电流为 $1-e$，因此

$$V_s=r_1e=r_2(1-e),$$

故

$$e=\frac{r_2}{r_1+r_2},$$

而总电阻为

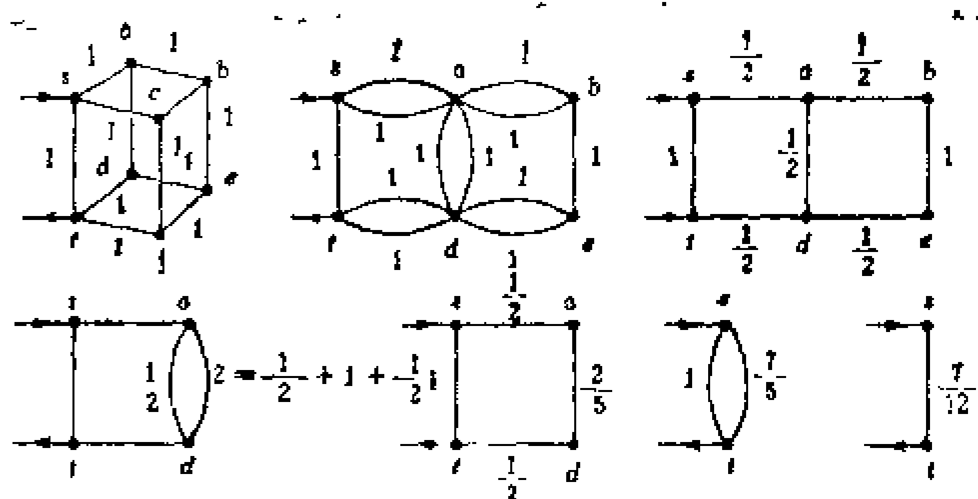
$$r=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}\quad 或\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}。$$

这表明电阻的倒数，即**电导**与电阻本身一样是很自然的概念，事实上，这个概念用起来更为方便一些，特别是在§3中。（电阻为1欧姆的边的电导是1姆欧）。现在我们证明了，串联时电阻相加，而并联时电导相加。

当考虑欧姆定律的某些极限情形时，使用电导特别方便。如果边 ab 的电阻为0，则必有 $V_a=V_b$，而从电学观点看，这两个顶点可以看作是同一个，俗称 a"短接"于 b。当然，如果有其它理由使 $V_a=V_b$，a 也就可以短接于 b. 作为另一个极端情形，我们可以引入电导为0的边而不影响电流和电位，相反，我们可以割断一条边，使它的电导为0。当然，电阻为0的边就是有∞电导的边，而电导为0的边就是有∞电阻的边。

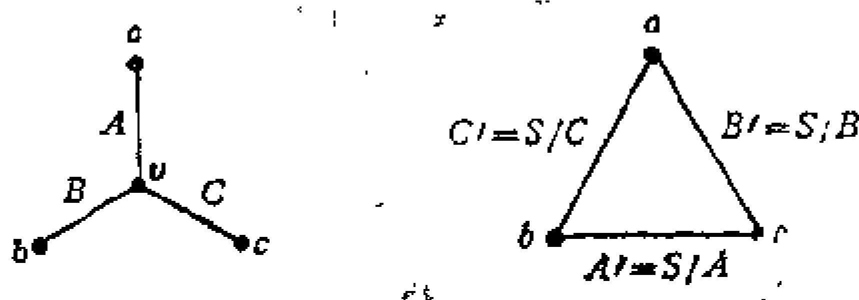
现在我们来看一下，熟悉电阻的串联和并联以及短接顶点的可能性之后，对帮助我们确定总电阻有什么用。例如，我们取一个由立方体的各边构成的网络，其中每条边的电阻为1欧姆，跨过边 st 的总电阻是多少？使用图Ⅱ。3中第一个图的记号，我们看到：根据对称性 $V_a=V_c$ 和 $V_d=V_f$，故 c 可以短接于 a，而 f 可以短接于 d，这给出第二个图。从现在开始，我们可以简化串联和并联的电阻，直到我们求得总电阻是7/12。知道这些以后，易于求得所有的电流。

实际计算中的另一个重要方法称为**星—三角变换**。如果一个顶点 v 恰邻接于三个顶点 a、b 和 c，它们分别由电阻



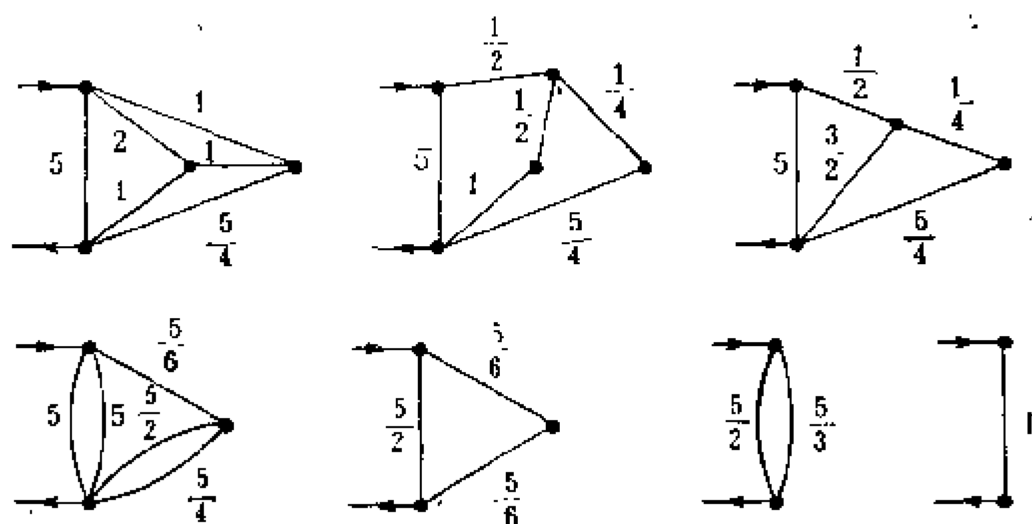
图Ⅰ.3。计算立方体的总电阻。

为 A、B 和 C 的边联结，则称 v 是一个星的中心，这如图Ⅰ.4的第一个图所示。如果不允许电流流入或流出 v，则我们能用图Ⅰ.4的第二个图所示的三角图来代替这个星，因为读者易于验证，跨过三对顶点 ab，bc 和 ca 中的任一对的总电阻在这两个网络中是相同的。当然，我们也可以应用反变换，用 $A=B'C'/T$，$B=C'A'/T$ 和 $C=A'B'/T$ 代替 A'，B' 和 C'，此处 $T=A'+B'+C'$。附带说明一下，如果我们在第一个变换中使用电阻，而在第二个变换中使用电导，公式就变成对称的：$A'=B+C+BC/A$ 和 $\alpha=\beta'+\gamma'+\beta'\gamma'/\alpha'$，此处 α，β，…是电导。



图Ⅰ.4。星三角变换；$S=AB+BC+CA$。

作为星一三角变换的一个应用，我们来计算跨过四面体一条边的总电阻，其中电阻如图Ⅱ.5所示，这些图都是一看就明白的。



图Ⅱ.5. 星一三角变换的应用.

我们用稍带理论性的一点评注来结束这一节：我们将证明解的存在，更准确地说，我们将证明，如果大小为1的电流通过网络，则在一条边中的电流可以用某些生成树的数目表示。为了简便起见，假设网络的图是连通的；每条边有单位电阻，大小为1的电流在端点 s 流入而在端点 t 流出。

定理1. 给定一条边 ab，用 $N(s,a,b,t)$ 表示 G 的这样的生成树的数目，在其中从 s 到 t 的（唯一的）路依次包含 a 和 b，同样定义 $N(s,b,a,t)$，用 N 表示 G 的生成树的总数。最后令 $w_{ab}=\{N(s,a,b,t)-N(s,b,a,t)\}/N$。

在 G 中的各条边中的电流规定如下：对每条边 ab 都有大小为 w_{ab} 的电流从 a 流向 b，则存在从 s 到 t 的大小为1的总电流，它满足基尔霍夫定律。

证明： 对每棵生成树 T，恰存在 s 的一个邻接顶点 x_T，

它是在 T 中的 $s—t$ 路 P_T 上。因此，$\sum_{b\in\Gamma(s)} N(s,s,b,t)=N$，此处 $\Gamma(s)$ 是 s 的邻接顶点的集，因为对每个顶点 $b\in\Gamma(s)$，有 $N(s,b,s,t)=0$，我们得到 $\sum_{b\in\Gamma(s)}\omega_{sb}=1$。根据对称性，$\sum_{a\in\Gamma(t)}\omega_{at}=1$，故若有大小为 1 的电流在 s 流入网络且在 t 流出，基尔霍夫定律在 s 和 t 处得到满足。

为了证明此定理，我们必须证明：如果在其它任何点不允许有电流流入或流出网络，则电流和电位定律得到满足。

首先我们来看电流定律：为了简便起见，用 N 乘所有的电流。一个生成树 T 提供给某个与 s 和 t 均不同的顶点 y 的流入和流出的电流各多少？如果 y 不在 $s—t$ 路 P_T 上，则 T 对 $N(s,x,y,t)$ 和 $N(s,y,x,t)$ 不起作用。现在，如果 y 在 $s—t$ 路 $P_T=s\cdots xyz\cdots t$ 上，则 T 把 1 给予 $N(s,y,z,t)$，它也把 1 给予 $N(s,x,y,t)$。换言之，T 使大小为 1 的电流流入 y，并使大小为 1 的电流流出 y，这样电流定律得到满足。

当全部边有同样的电阻时，电位定律要求在一个定了向的圈中的总电流为零。为了证明这一点，我们也像前面那样做，但是，要先将 $N(s,a,b,t)$ 的定义稍加改写。如果一个森林恰有两个分支 F_s，F_t，s 在 F_s 中，而 t 在 F_t 中，就称此森林为**丛林**，则 $N(s,a,b,t)$ 是使 $a\in F_s$ 和 $b\in F_t$ 的丛林 $F=F_s\cup F_t$ 的数目，而 $N(s,b,a,t)$ 可类似地定义。那么，丛林 $F=F_s\cup F_t$ 提供给一个圈的总电流是多少呢？它是从 F_s 到 F_t 的圈边的数目减去从 F_t 到 F_s 的圈边的数目，所以

它是零。 □

上面的论证可以逐句地重写，以给出边有任意电导情形时的解。对于一个生成树 T，定义 T 的**权** $w(T)$ 是它的各边的电导之积。令 N^* 是所有生成树的权的和，令 $N^*(s,a,b,t)$ 是这样的生成树的权之和：其中在（唯一的）s—t 路上 b 在 a 之后，而令 $N^*(s,b,a,t)=N^*(t,a,b,s)$。

定理2. 存在满足基尔霍夫定律的电流分布，在其中大小为 1 的电流流入 s 并流出 t。在边 ab 中电流的值由 $\{N_*(s,a,b,t)-N^*(s,b,a,t)\}/N^*$ 给出。 □

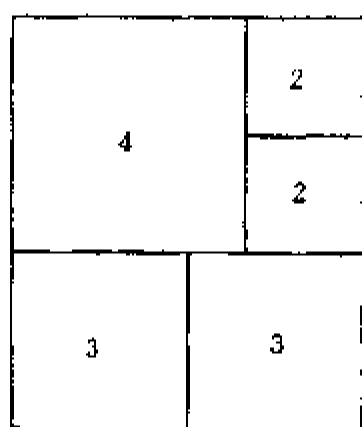
推论 3. 如果各边的电导都是有理数，而且大小为 1 的电流通过网络，则在每条边中的电流均为有理数。 □

§2 用正方形拼成正方形

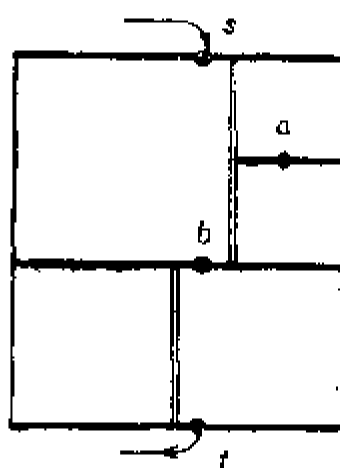
这一节我们谈谈趣味数学的问题。我们感到有必要注意从趣味数学中产生的一个与电网络有关的著名问题。存在完美的正方形划分吗？换言之，能不能把一个闭的正方形划分成有限个（但至少两个）大小互不相同且仅在边界上相交的正方形区域？

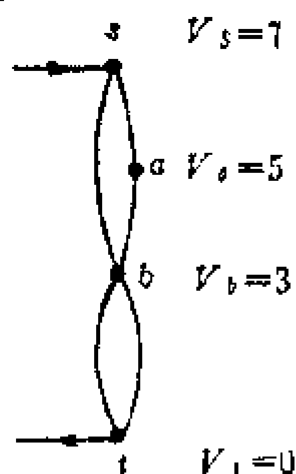
我们考虑把正方形拼成矩形，比如说，像图 Ⅱ.6所示的那个；在正方形中的数是其边长。我们从镍铬铁合金（或任何其它的具有低电导的材料）板上切出这个矩形，并把两根银（或某种高电导材料）制成的棒分别放在其顶上和底下。

如果保证在顶上的银棒是7伏特，而在底下的银棒保持0伏特，将会出现什么情况？当然，均匀的电流将从顶上流向底下。事实上，在矩形点上的电位仅依赖于点的高度：在高为x的点的电位将是x伏特。并且，不存在横过矩形的电流，电流仅从顶上流向底下。如果(i) 我们把一些银棒放在各正方形的水平边上，和(ii) 沿垂直边切成窄裂缝，如图Ⅰ．7。第一图所示，这样，电流根本不变。



图Ⅰ.6．正方形拼成的（非完美的）6×7矩形．





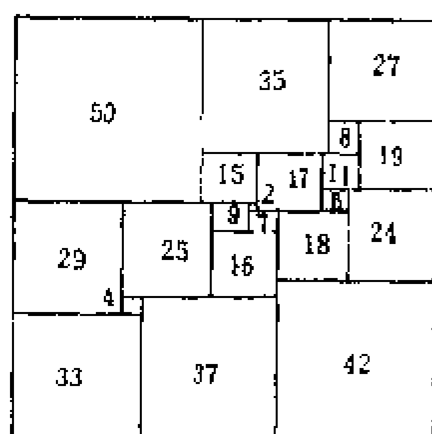
图Ⅰ.7．与我们的矩形相联系的电网络．

现在，因为银是很好的导体，每个银棒的两端都被短接，因此可以把它们等同起来。这样，作为一个导电体，整个矩形可以看作如图Ⅰ．7第二个图所示的平面网络，其中，一条边的电导等于对应正方形从顶到底的电导。显然，矩形从顶到底的电导与水平边的长成正比，而电阻与垂直边的长成正比，因此，所有正方形有同样的电阻，比如说有单位电阻，故在图Ⅰ．7中的所有边都有单位电阻。在一条边中电压降是多少？它对应于正方形的边长。整个系统的电阻是多

少？它是原来的大矩形的水平边与垂直边之比，即为 7/6。

因为上面的过程是可逆的，即每个可分成正方形的矩形可以由某个网络获得。这样，我们就有了一种有效的工具来帮助我们研究可划分成正方形的正方形。取一个连通的平面图 G，令其每条边的电阻为 1，我们就把它变成了一个电网络。计算从顶点 s 到顶点 t 的总电阻，如果它也是 1，网络就可能对应于一个适当的可划分成正方形的正方形。如果各边上的电位差均不同，即所有正方形的大小均不同，则我们就得到一个可划分成正方形的完美正方形。

当然，在这里我们的问题还远没有解决，甚至我们还不知道是否确实存在一个可划分成正方形的正方形，但是，上述方法使我们可以系统地寻求解答。虽然在电子计算机的帮助下已经发现了许多可划分成正方形的正方形，但是，最早的两个例子是由 Sprague 在 1939 年和 Brooks, Smith, Stone 和 Tutte 在 1940 年在没使用电子计算机的情形下找到的。拼成一个正方形最少要用 21 个正方形†；图 Ⅱ.8 给出了这种拼法，它由 Duijvestijn 得到，事实上，这是仅有的一个 21 阶拼法。



图Ⅱ.8. 正方形拼成的完美正方形，用21个大小不同的正方形拼成的正方形。

将矩形划分成正方形的方法与电网络之间的联系，使我

† 指大小两两不同的正方形——校注。

们得出一个很好的结果，这个结果首先由 Dehn 在 1903 年证明出来。推论 3 告诉我们，如果每边有电阻 1，而大小为 1 的电流通过这一系统，则在每条边中电流的值是一个有理数。这可翻译成下面关于划分矩形成正方形的结果。

定理 4. 如果一个矩形可以划分成一些正方形，则该矩形的两条邻边之比是有理数。 □

同样，矩形可以划分成一些正方形当且仅当它可以划分成一些全等的正方形。

显而易见，电网络可以用来获得将矩形划分成具有指定形状的矩形的划分法：电阻为 r 的一条边 e 对应于一个高是底的 r 倍的矩形。请读者解答基于这种简单的想法的练习（练习 9—12）；另外一些练习是与此有关的装箱问题（练习 13—15）。

§3 与图相联系的向量空间和矩阵

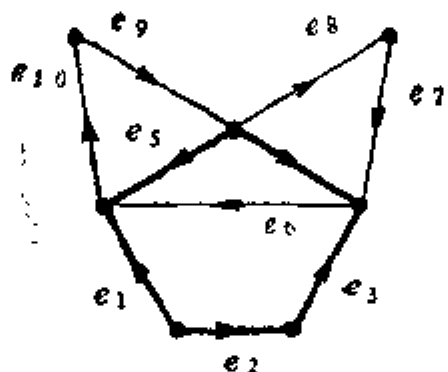
图 G 的**顶点空间** $C_0(G)$ 是由从 $V(G)$ 到 C 的所有函数组成的复向量空间。同样，**边空间** $C_1(G)$ 是由从 $E(G)$ 到 **C** 的所有函数组成的复向量空间。在这些定义中，有时用二阶域 F_2 或其它域来代替复数域是方便的。我们取 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 和 $E(G)=\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$，因此 $\dim C_0(G)=n$，而 $\dim C_1(G)=m$。$C_0(G)$ 的元素通常写成 $\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ 或 $\mathbf{x}=(x_i)_1^n$ 这样的形式。和 $\sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ 是顶点的形式和，但是，

如果我们把 v_i 看作函数 $V(G)\longrightarrow \mathbf{C}$，此函数除了在 v_i 为 1 之外处处为 0，则 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是 $C_0(G)$ 的基，而上面的和只是将 $C_0(G)$ 的一个元素用基元素来表示。同样，$C_1(G)$ 的元素可以写成 $\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{m} y_i e_i$ 或 $\mathbf{y}=(y_i)_1^m$。我们称$(v_1, v_2, \cdots, v_n)$是顶点空间的**标准基**，而$(e_1, e_2, \cdots, e_m)$是边空间的**标准基**。我们将对这些空间引入内积，在其中，标准基是标准正交的：$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle=\sum_i x_i \bar{y}_i$。

在这一节中，我们主要讨论边空间 $C_1(G)$。首先，我们定义两个子空间，它们互为正交补。令 L 是 G 中的一个圈，它有给定的圈定向 $L=u_1u_2\cdots u_l$，如果 $e_i=u_ju_{j+1}$ 且 e_i 的方向是从 u_j 到 u_{j+1}，则说 e_i 与 L 同向。这个有向圈 L 可以等同于 $C_1(G)$ 的一个元素 $\mathbf{z}_L$：

$$\mathbf{z}_L(e_i)=\begin{cases} 1 & \text{如果 } e_i\in E(L) \text{ 且 } e_i \text{ 与 } L \text{ 同向,} \\ -1 & \text{如果 } e_i\in E(L) \text{ 且 } e_i \text{ 与 } L \text{ 不同向,} \\ 0 & \text{如果 } e_i\notin E(L)\text{。} \end{cases}$$

一个简单的例子如图 Ⅱ.9 所示。用 $Z(G)$ 表示当 L 遍历圈的集时，由向量 $\mathbf{z}_L$ 所生成的 $C_1(G)$ 的子空间，$Z(G)$ 是 G 的**圈空间**。



图Ⅱ.9. 如粗圈L按逆时针方向定向，在 $C_1(G)$中它对应的向量是 $z_L=\{-1, 1, 1, -1, 1, 0, \cdots, 0\}$.

现在，令 P 是 G 的顶点集的划分 $V=V_1\cup V_2$。考虑从 V_1 到 V_2 的边集 $E(V_1,V_2)$，这样的一个边集叫做一个**割**。自然而然地联系于这样一个划分，在 $C_1(G)$ 中存在一向量 $\mathbf{u}_P$，称为**割向量**：

$$\mathbf{u}_P(e_i)=\begin{cases}1 & \text{如果 } e_i \text{ 从 } V_1 \text{ 到 } V_2,\\ -1 & \text{如果 } e_i \text{ 从 } V_2 \text{ 到 } V_1,\\ 0 & \text{如果 } e_i\notin E(V_1,\ V_2)。\end{cases}$$

我们把由所有割向量 $\mathbf{u}_P$ 生成的边空间 $C_1(G)$ 的子空间记作 $U(G)$，$U(G)$ 是 G 的**割**(或**余割**)**空间**。

定理 5. 内积空间 $C_1(G)$ 是圈空间 $Z(G)$ 和割空间 $U(G)$ 的正交直接和。如果 G 有 n 个顶点、m 条边和 k 个分支，则

$$\dim Z(G)=m-n+k \quad \text{和} \quad \dim U(G)=n-k。$$

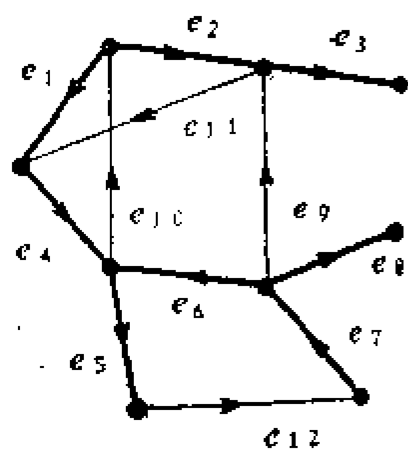
证明：首先我们来证明，$Z(G)$ 和 $U(G)$ 是正交的。令 L 是一个圈，而 P 是一个划分 $V=V_1\cup V_2$。内积 $\langle \mathbf{z}_L,\ \mathbf{u}_P\rangle$ 等于什么？它只不过是 L 中沿 L 方向从 V_1 到 V_2 的边数减去从 V_2 到 V_1 的边数。这样，对每一个圈和划分 P，有 $\langle \mathbf{z}_L,\ \mathbf{u}_P\rangle=0$，故 $Z(G)$ 和 $U(G)$ 是正交的。

因为 $C_1(G)$ 的维数是边数 m，如果我们能证明 $\dim Z(C)\geqslant m-n+1$ 和 $\dim U(G)\geqslant n-1$，则两个断言都将得到证明。首先，我们在 G 是连通的假设下来证明这一点，一般情况易于由此得到。

这样，我们假设 G 是连通的，即 $k=1$。令 T 是 G 的一棵生成树。我们要利用 T 来给出 $Z(G)$ 中的 $m-n+1$ 个独立向量和 $U(G)$ 中的 $n-1$ 个独立向量。我们可以这样来选取

边的下标，使得 $e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$ 是树 T 的边，而 $e_n, e_{n+1}, \cdots, e_m$ 是其余的边，即 T 的弦。

我们知道，对每条弦 $e_i (i \geqslant n)$，存在一个（唯一的）定向圈 C_i，使 $\mathbf{z}_{C_i}(e_i)=1$，而对每条其它的弦 e_j，即只要 $j \geqslant n$ 和 $j \neq i$，有 $\mathbf{z}_{C_i}(e_j)=0$。（简记为：如果 $j \geqslant n$，$\mathbf{z}_{C_i}(e_j)=\delta_{ij}$，此处 δ_{ij} 是 Kronecker 记号。）我们称 C_i 是属于 e_i 的**基本圈**（关于 T），而 $\mathbf{z}_{C_i}$ 是一个**基本圈向量**（见图Ⅰ.10）。同样，删除 T 的边 e_i，生成树剩下的部分变成两个分支。令 V_1^i 是包含 e_i 的起点的分支的顶点集，而 V_2^i 是包含 e_i 的终点的分支的顶点集。如果 P_i 是划分 $V=V_1^i \cup V_2^i$，则对 $1 \leqslant j \leqslant n-1$，显然有 $\mathbf{u}_{P_i}(e_j)=\delta_{ij}$。割 $E(V_1^i, V_2^i)$ 是属于 e_i（关于 T）的**基本割**，而 $\mathbf{u}_{P_i}$ 是**基本割向量**。



图Ⅰ.10 属于 e_9 的基本圈向量是 $z_{C_9}=e_9-e_2+e_1+e_4-e_6$，属于 e_4 的基本割向量是 $u_{P_4}=e_4-e_{10}-e_9$。

显而易见，$\{\mathbf{z}_{C_i}: n \leqslant i \leqslant m\}$ 是圈向量的一个独立集。事实上，如果 $\mathbf{z}=\sum_{i=n}^{m} \lambda_i \mathbf{z}_{C_i}=0$，则对每个 $j \geqslant n$，我们有 $0=\mathbf{z}(e_j)=\sum_{i=n}^{m} \lambda_i \delta_{ij}=\mathbf{y}_j$，因此，每个系数 λ_i 均为 0。同样，对 $1 \leqslant i \leqslant n-1$，基本割向量 $\mathbf{u}_{P_i}$ 也是独立的，因此，$\dim Z(G) \geqslant m-n+1$ 和 $\dim U(G) \geqslant n-1$，这正是所要求的。

最后，一般情形 $k\geqslant 1$ 可由情形 $k=1$ 立即得到。因为，如果 G 有分支 $G_1, G_2, \cdots, G_k$ 则 $C_1(G)$ 是子空间 $C_1(G_1)$，$C_1(G_2), \cdots, C_1(G_k)$ 的正交直接和；而且 $Z(G_i)=Z(G)\cap C_1(G_i)$ 和 $U(G_i)=U(G)\cap C_1(G_i)$。

□

上面的证明表明，称为 G 的**圈数**的 $\dim Z(G)$，和 $\dim U(G)$ 独立于用以定义边空间的域。在证明中生成树的使用不是必要的，在某些情形下，例如在可平面图时，存在别的自然的圈基和割基（参看练习 16。）

存在几种与图和上面讨论的向量空间有自然联系的矩阵。图 G 的**邻接矩阵** $A=A(G)=(a_{ij})$ 是一个 $n\times n$ 矩阵，其定义为：

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果 } v_iv_j\in E(G),\\ 0 & \text{否则.}\end{cases}$$

为了定义图的关联矩阵，如定义圈空间和割空间时那样，我们再考虑边的一种定向。G 的**关联矩阵** $B=B(G)=(b_{ij})$ 是一个 $n\times m$ 矩阵，其定义为：

$$b_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果 } v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的始点,}\\ -1 & \text{如果 } v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的终点,}\\ 0 & \text{其它。}\end{cases}$$

在这两个矩阵 A 和 B 之间有一个简单的关系。

定理 6. $BB^t=D-A$，此处 B^t 表示 B 的转置，而 D 是 $n\times n$ 对角矩阵，在其中 $(D)_{ii}$ 是顶点 v_i 在 G 中的度 $d(v_i)$。

证明： $(BB^t)_{ij}$ 是什么？它是 $\sum_{l=1}^{m} b_{il}b_{jl}$，如果 $i=j$，它

为 $d(v_i)$；如果 v_iv_j 是一条边，它是 -1（如果 $e_l=v_iv_j$ 的方向是从 v_i 到 v_j，则 $b_{il}b_{jl}=1\cdot(-1)=-1$，而所有其它乘积均为 0），如果 v_iv_j 不是边且 $i\neq j$，它为 0。 □

我们可以、并且准备把矩阵 A 和 B 等同于两个线性变换 A：$C_0(G)\longrightarrow C_0(G)$ 和 B：$C_1(G)\longrightarrow C_0(G)$，它们可用标准基定义为：$(A\mathbf{x})_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$ 和 $(B\mathbf{y})_i=\sum_{j=1}^{m}b_{ij}y_j$。如果我们想叙述得更严格，要把顶点或边空间中的向量写成列向量，或者记 $A\mathbf{x}^t$ 和 $B\mathbf{y}^t$，此处 t 为转置记号；因为不会混淆，我们就不必这样做了。如果 C 是圈，则显然，$B\mathbf{z}_C=0\in C_0(G)$，事实上，很容易证明（参看练习 17）圈空间恰为 B 的核。这样，B 的秩为 $r(B)=m-(m-n+k)=n-k$。并且，B 的转置把 $C_0(G)$ 映射成 $C_1(G)$，而 B^t 的像恰为割空间（参看练习 18）。

在第Ⅷ章中，我们将比较详细地讨论邻接矩阵的特征值和特征向量，在这一节中，我们使用这些矩阵来解第一节中讨论的电网络问题。事实上，基尔霍夫首先认识到可以将矩阵代数应用于图论，就是与电网络有关的部分。

我们如何用矩阵和边空间中的向量来叙述基尔霍夫定律呢？假设 G' 是我们的电网络的图：$V(G')=\{v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}\}$，$E(G')=\{e_1, e_2, \cdots, e_{m'}\}$，网络是连通的，并且有电压发生器保证在 v_i 和 v_j 之间的电位差是 g_i-g_j 伏，$1\leqslant i<j\leqslant k$。为了以简洁的形式表示基尔霍夫定律，我们把顶点 v_n 添加到 G' 中，并且把它与 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 联结起来，

新图记为 G。令 $m=m'+k$ 和 $e_{m'+i}=v_nv_i$，$i=1,2,\cdots,k$，故 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 和 $E(G)=\{e_1,e_2\cdots,e_m\}$。

给 G' 的以一个任意的定向，并令 w_i 是边 e_i 中在 e_i 方向上流的电流的大小，这样，$w_i=-1$ 表示 1 安培的电流沿 e_i 的逆向流过．对每条新边 $e_{m'+i}$ 给予从 v_n 到 v_i 的方向，并令 $w_{m'+i}$ 是在 v_i 流入网络的总电流，$w_{m'+i}=-1$ 也表示 1 安培的电流在 v_i 流出网络。向量 $\mathbf{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_m)\in C_1(G)$ 是**电流向量**。用这样的记号，基尔霍夫电流定律取形式：

$$B\mathbf{w}=\mathbf{0}. \tag{1}$$

用矩阵形式来叙述基尔霍夫电位定律也并不难。令 p_i 是在边 e_i 中的电位差，并令 $\mathbf{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_m)\in C_1(G)$ 是**电位向量**。电位定律说：对每个圈 $\mathbf{z}\in C_1(G)$，有 $\langle\mathbf{z},\mathbf{p}\rangle=0$．我们把所有必要的信息集中在一个矩阵中而不是对每个圈分别提出。如前所述，我们在 G 中选取一棵生成树 T，并标定它的边使 $e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}$ 是该树的边，而 e_n，e_{n+1}，$\cdots$，e_m 是弦．令 C 是一个 $m\times(m-n+1)$ 矩阵，其第 i 列是属于边 $e_{n-1+i}(i=1,2,\cdots,m-n+1)$ 的基本圈向量 $\mathbf{z}_{Cn-1+i}$．因为基本圈向量构成圈空间的一个基，电位定律就取形式：

$$C^t\mathbf{p}=\mathbf{0},$$

此处 C^t 表示 C 的转置。 (2)

现在，为了求通过 G' 的边的电流，我们还要有一个方程，即联系电位与电流、电导和电压发生器的方程。对于 $i\leqslant m'$，令 d_i 是边 e_i 的电导，并要求每条新边 $e_j(j\geqslant m'+1)$ 有 0 电导．可以假设，对每个 $i\leqslant m'$，有 $d_i>0$，因为不然的话，边 e_i 是断开的。令 D 是一个 $m\times m$ 对角矩阵，其中

$(D)_{ii}=d_i$，最后，令 $g=(0,\cdots,0,g_1,g_2\cdots,g_k)\in C_1(G)$ 是电压发生器向量，则显然有

$$\mathbf{p}=D\mathbf{w}+\mathbf{g}。\tag{3}$$

这个方程包含了除基尔霍夫定律之外的关于电流的所有信息。

为了对 w 和 p 解(1)、(2)和(3)，我们将把 $C_1(G)$ 剖分成 E_T 和 E_N，此处 E_T 是由树 T 的边生成的子空间。而 E_N 是由各条弦即不在树T中的边生成的子空间.令 $\mathbf{w}=(\mathbf{w}_T,\mathbf{w}_N)$ 和 $\mathbf{p}=(\mathbf{p}_T,\mathbf{p}_N)$是对应的剖分，并且，用 $\tilde{B}$ 表示由矩阵 B 删去最后一行得到的矩阵，有

$$C=\begin{pmatrix}C_T\\C_N\end{pmatrix}\ 和\ \tilde{B}=(B_TB_N)。$$

因为 C 的列是基本圈，C_N 是$(m-n+1)\times(m-n+1)$单位矩阵 I_{m-n+1}。因为所有的圈均在 B 的核中，$BC=0$，故 $\tilde{B}C=0$，这给出 $B_TC_T=-B_N$。现在读者可以验证 B_T 是可逆的（练习 19），因此

$$C_T=-B_T^{-1}B_N。$$

有了这些准备之后，可以很容易地解我们的方程。

定理 7. 满足方程 $\mathbf{p}=D\mathbf{w}+\mathbf{g}$ 的电流 w 由

$$\mathbf{w}=-C(C^tDC)^{-1}C^t\mathbf{g}\ 给出。$$

证明： 方程(1)蕴含 $B_T\mathbf{w}_T+B_N\mathbf{w}_N=0$，故 $\mathbf{w}_T=-B_T^{-1}B_N\mathbf{w}_N=C_T\mathbf{w}_N$，因此，$\mathbf{w}=C\mathbf{w}_N$。结合(2)和(3)我们求得 $C^tD\mathbf{w}+C^t\mathbf{g}=0$，故$(C^tDC)\mathbf{w}_N=-C^t\mathbf{g}$。因为很容易证明 C^tDC 是可逆的，结果就被证明了。 □

显然。不仅当 G 和g 如上面定义的那样，而且对某种更一般的情形，定理 7 都成立。事实上，下列条件是存在唯一电流 w 的充分条件（并且或多或少也是必要的）对每个 i，$g_i d_i=0$，而且具有 $d_i>0$ 的边 e_i 形成一个连通子图。

进一步，此结果对重图，即有若干条边联结同一对顶点的"图"成立。读者要证明这一事实，必须检查所有概念（关联矩阵，圈和割空间，基本圈和割）都能象前面那样定义，而结果的证明不变。

如果考虑重图，我们可以不在网络的图 G' 中添加新顶点，而用稍简单的形式建立定理 7。这样，如果电流在顶点 a 流入 G'，在顶点 b 流出，则我们用一条具有 0 电导的新边 e 联结 a 和 b（a 和 b 原已有边联结时，也这样做），并且要求（选取 g = (0,0,…,0,1)，此处 e 是最后的一条边）在 e 中的电位差为 1。使用这种办法，我们可以验证，在 e_i 中的电流与总电流（即在 e 中的电流）的比确实由 §1 中的定理 1 给出，但是，这个验证冗长而又复杂，另一方面，很容易用关联矩阵来表示出生成树的总数。

为做到这一点，我们要使用两个事实。第一个事实是对 B_T 是可逆的这一论述加以推广：如果对应于 B_T 的列的各边构成一棵树，则 $\tilde{B}$ 的一个 $(n-1)\times(n-1)$ 子矩阵的行列式的模为 1，否则为 0（参看练习 19）。第二个事实是线性代数中的 Cauchy—Binet 公式，它说：如果 K 是一个 $p\times q$ 矩阵($p\leqslant q$)，而 L 是一个 $q\times p$ 矩阵，则 $\det KL=\sum\limits_{p}\det K_p L_p=\sum\limits_{p}\det K_p\det L_p$，其中求和是对$\{1,2,\cdots,q\}$的所有 p—

子集P进行的，而K_p是K的$p\times p$子矩阵，它是以p的元素称号的列构成的K的子矩阵，而L_p是L的子矩阵，它是由L的对应的行构成。综合这两个事实，我们得到下面的公式。

定理 8。G的生成树的数目是$\det\tilde{B}\tilde{B}'$。 □

练习

1⁻. 验证星一三角变换中的公式。

在练习2—6中，假设所有的边都具有单位电阻。

2⁻. 计算图Ⅰ.1中的图在顶点2和3之间测定的网络电阻。

3. 计算立方体的每对不同的顶点之间的电阻。

4. (a)八面体，(b)十二面体，(c)二十面体的面个邻接顶点之间的电阻是多少？

5. 假设连通网络的每条边都在同样数目的成生树中，证明：在两个邻接顶点之间的总电阻是$(n-1)/e$，此处n是网络的阶而e是网络的级。用练习4验证你的答案。

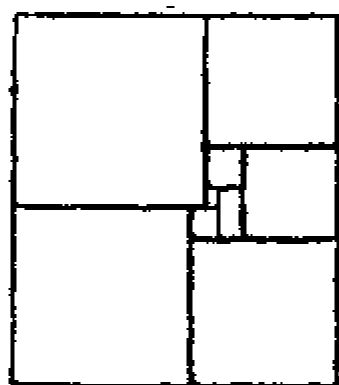
6. 应用适当的星一三角变换，计算十二面体两条邻接边中点间的电阻。

7. 给出定理2的详细证明。

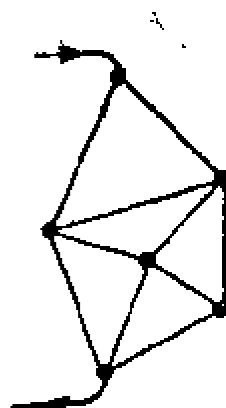
8. 求出图Ⅰ. 11中表明的可划分成正方形的矩形。

9. 什么样的可划分成正方形的矩形对应于图Ⅰ.12的网络？把此矩形转动90°，画出这一矩形的网络。

10⁻. 对应于练习3中的立方体的网络，有多少个本质上



图Ⅰ.11，69×61的划分成正方形的矩形。

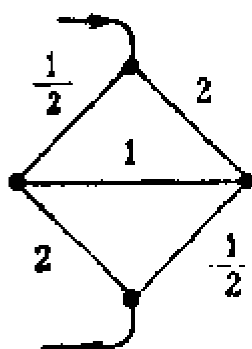


图Ⅰ.12．一个平面网络．

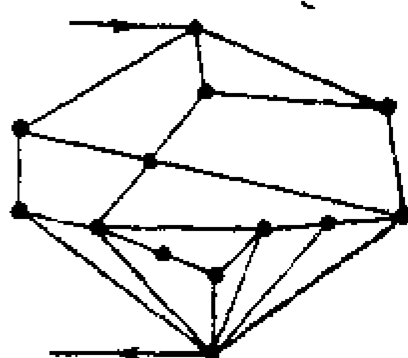
不同的可划分成正方形的矩形？

11．求与图Ⅰ.13相对应的拼法。

12．求图Ⅰ.14给出的简单的完美的划分成正方形的正方形（此例是J.Wilson在1964年发现的。）



图Ⅰ.13．具有不同电阻的边的一个网络．



图Ⅰ.14．给出完美正方形的一个网络．

13．证明：等边三角形不能分成有限多个不全等的等边三角形。

14．证明：如果长方体可以分解成立方体，则其邻边之比是有理数。

15．证明：立方体不能分解成有限多个不全等的立方

体。

16. 证明：在平面图中，各个有界面的边界构成一个圈基。

17. 证明：圈空间是由关联矩阵 B 定义的映射 $C_1(G)\to C_0(G)$ 的核。

18. 令 B^t 是 B 的转置，证明：割空间是由 B^t 定义的映射 $C_0(G)\longrightarrow C_1(G)$ 的像。

19. 令 F 是具有关联矩阵 B 的一个 n 阶图的 $n-1$ 条边的一个集，令 $\tilde{B}_F$ 是 B 的一个 $(n-1)\times(n-1)$ 子矩阵，它的列对应于 F 的边，证明：$\tilde{B}_F$ 是可逆的当且仅当 F 是一棵树的边集。

20. 由定理 8 导出：在 n 个可区别的顶点上存在 n^{n-2} 棵树。

注

一个可划分成正方形的正方形的构成是发表于 R.Sprague, Beispiel einer Zerlegung des Quadrats in Lauter verschiedene Quadrate, J. Reine Angew. Math. 182(1940)60—64，紧接着又有 R.L.Brooks, C.A.B.Smith, A.H. Stone and W.T.Tutte, The dissection of rectangles into squares, Duke Math.J.7(1940)312—340。图 Ⅰ.8 中所示的正方形的构成发表于 A.J.W.Duijvestijn, Simple perfect square of lowest order, J.Combinational Theory Ser.B 25(1978)240—243.

定理 4 最初的证明归于 Max Dehn, Über die Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke, Math.Ann.57(1903)314—322.读者或许想看到的两篇评述性文章是 W.T.Tutte, The quest of the perfect square, Amer.Math. Monthly 72 (1965) 29—35 和 N.D.Kazarinoff and R.Weitzenkamp, Squaring rectangles and suqares, Amer.Math.Monthly 80(1973)877—883

第 Ⅲ 章　流，连通性和匹配

本章的一些结果在数学各分支中有许多应用，特别是 Hall 的配对定理，在代数和分析中是有用的工具。我们要介绍的每个结果都是某些对象存在性的必要和充分条件；在每种情形下，定理的妙处在于一个显然是必要的条件被证明也是充分的条件。在我们的结果的通常表述中，有两个函数 f 和 g，它们显然满足 $f \leqslant g$，而我们将证明 $\max f = \min g$。本章的结果互相之间的联系很紧密，它们被证明的次序只是出于作者的偏爱，为了强调这一点，某些结果将给出几个证明。

在第 I 章，我们观察了连通性的最简单的性质。现在，我们进一步来研究它，在 §2 中将证明关于连通性的基本定理，即 Menger 定理，它在 1927 年被首次证明，此定理后来成为关于有向图中的流的一个基本定理，即最大流最小割定理的推论之一。

尽管本书几乎全部内容都是介绍无向图，我们却在本章的第一节中引入了有向图中的流的概念，接着证明最大流最小割定理，其原因一方面是由于它提供了 Menger 定理一个最简单的证明，另一方面是由于它有关于无向图的若干其它重要推论。

一个图中的独立边的一个集合称为一个**匹配**。在二部图中，一个匹配可以等同于一个流，而最大流最小割定理取另

一种可广泛应用的组合结果的形式，即 Hall 的配对定理，在 §3 中将讨论这个结果的各种形式。

虽然我们从最大流最小割定理导出 Menger 定理和 Hall 定理，事实上，这些结果是紧密地相互联系着，而且由于它们十分重要，我们也给其中每一个以独立的证明。

特别是，Hall 定理告诉我们什么时候二部图有 1—因子。一个图的一个 1—**因子**是其这样的子图，此子图的顶点集与原图的顶点集相同，而且此子图的每个顶点的度均为 1。在任意图中，1—因子存在性的问题是一个困难得多的问题，它由 §4中介绍的 Tutte 定理回答。

§1 有向图中的流

令 $\vec{G}$ 是一个（有限的）有向图，其顶点集为 V，边集为 $\vec{E}$。我们研究在 $\vec{G}$ 中的从顶点 s（源）到顶点 t（汇）的（静态的）流。一个**流** f 是定义在边集上的一个非负函数，值 $f(\vec{xy})$是在边 $\vec{xy}$ 中的**流**。为了记号简单，我们把 $f(\vec{xy})$ 记作 $f(x,y)$，类似的约定也将对其它函数使用。从 s 到 t 的流须满足的唯一条件是基尔霍夫电流定律：流入每个中间顶点（即与 s 和 t 都不同的顶点）的总流等于流出该顶点的总流。这样，如果对 $x\in V$，记

$$\Gamma^+(x)=\{y\in V:\vec{xy}\in\vec{E}\},$$

$$\Gamma^-(x)=\{y\in V:\vec{yx}\in\vec{E}\},$$

则从 s 到 t 的流满足下列条件：对每个 $x\in V-\{s,t\}$

有
$$\sum_{y\in\Gamma^+(x)}f(x,y)=\sum_{z\in\Gamma^-(x)}f(z,x).$$

因为

$$0=\sum_{x\in V-\{s,t\}}\{\sum_{y\in\Gamma^+(x)}f(x,y)-\sum_{z\in\Gamma^-(x)}f(z,x)\}$$

$$=\sum_{u\in\{s,t\}}\{\sum_{z\in\Gamma^-(u)}f(z,u)-\sum_{y\in\Gamma^+(u)}f(u,y)\},$$

我们求得

$$\sum_{y\in\Gamma^+(s)}f(s,y)-\sum_{y\in\Gamma^-(s)}f(y,s)$$

$$=\sum_{y\in\Gamma^-(t)}f(y,t)-\sum_{y\in\Gamma^+(t)}f(t,y)。$$

用 $v(f)$ 表示这一公共值，称 $v(f)$ 为 f 的**值**或从 s 到 t 的**流的量**。

当流满足某些约束时，我们要确定从 s 到 t 的最大流的值。首先，我们要处理所谓边的容量限制通过边的流的情形，然而几种看起来更复杂的情形可以化成这种情形。

给定有向图 $\vec{G}=(V,\vec{E})$ 及其中两个顶点 s 和 t。对于 $\vec{G}$ 中的每条边 $\vec{xy}$ 系以一个非负数 $c(x,y)$，称为该边的**容量**，我们将假设通过边 $\vec{xy}$ 的流不能大于容量 $c(x,y)$。

给定 V 的两个子集 X 和 Y，用 $\vec{E}(X,Y)$ 表示有向 $X-Y$ 边的集合：

$$\vec{E}(X,Y)=\{\vec{xy}:x\in X,y\in Y\}。$$

每当 $g:\vec{E}\longrightarrow\mathbf{R}$ 是一个函数时，我们记

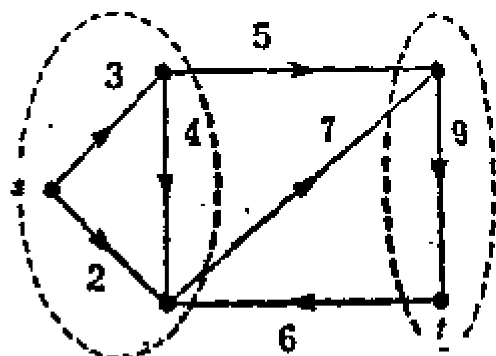
$$g(X,Y)=\sum g(x,y),$$

此处求和是对 $\vec{E}(X,Y)$ 进行的。如果 S 是 V 的含有 s 而不含 t 的一个子集，则称 $\vec{E}(S,\overline{S})$ 为分开 s 和 t 的一个**割**（其中 $\overline{S}=V-S$）。如果删除割的所有边，则在其余部分上，就

不再能定义从 s 到 t 的正值流。反之也很明显，如果 F 是边集，删除此边集后，不存在从 s 到 t 的流（即对从 s 到 t 的每个流有 $v(f)=0$），则 F 包含一个割（练习 1）。割 $\overrightarrow{E}(S,\bar{S})$ 的容量是 $c(S,\bar{S})$（见图Ⅲ.1）。显而易见（练习 2），割的容量大于或等于所有流值的最大值。著名的 Ford 和 Fukerson 的最大流最小割定理说，这个平凡的不等式事实上是等式。在陈述此定理及研究其证明之前，先对上面提到的最大值和最小值这两个词加以说明。因为仅存在有限多个割，故必存在一个容量最小的割。具有最大值的流的存在性稍有点不平凡。事实上，对每个流 f 有：

$$v(f)\leqslant\sum_{\overrightarrow{xy}\in\overrightarrow{E}}c(x,y),$$

故 $v=\sup v(f)<\infty$。令 $f_1,f_2,\cdots$ 是满足 $\lim_n v(f_n)=v$ 的流的序列，则用取一个子序列的办法，我们可以假设对每个 $\overrightarrow{xy}\in\overrightarrow{E}$，序列 $(f_n(x,y))$ 是收敛的，比如说收敛于 $f(x,y)$。函数 f 是具有值 v 的流，即有最大值的流。用类似的方法，可以证明，当一些边有无穷容量时，也存在具有最大值的流，此最大值可以是有限的也可以是无限的（练习 3）。



图Ⅲ.1. 具有容量 12 的一个割（每条边下面的数字是其容量。）

定理 1. （最大流最小割定理）从 s 到 t 的最大流的值等于分开 s 和 t 的割的容量的最小值。

证明： 我们已经注意到，存在具有最大值 v 的流 f，

而每个割的容量至少为 v。这样一来，为证明此定理，只须证明存在具有容量 v 的割。事实上，我们完成的工作不限于此：我们将给出一个很简单的方法来从一个具有最大值的流 f 构造出这样的一个割。

递归地定义子集 $S\subset V$ 如下：令 $s\in S$，如果 $x\in S$ 和

$$c(x,y)>f(x,y)$$

或

$$f(y,x)>0,$$

则令 $y\in S$。

我们要证明，$\vec{E}(S,\overline{S})$ 是分开 s 和 t 的具有容量 $v=v(f)$ 的割。首先来看为什么 $t\notin S$。如果 $t\in S$，我们能找到这样的顶点 $x_0=s,x_1,\cdots,x_l=t$，对于每个 i，$0\leqslant i\leqslant l-1$，有

$$\varepsilon_i=\max\{c(x_i,x_{i+1})-f(x_i,x_{i+1}),\\ f(x_{i+1},x_i)\}>0。$$

记 $\varepsilon=\min_i\varepsilon_i$。则可用下述方法，使 f 可以扩充为流 f^*：如果 $\varepsilon_i>f(x_{i+1},x_i)$，则使 $\overrightarrow{x_ix_{i+1}}$ 中流增加 ε；否则，使 $\overrightarrow{x_{i+1}x_i}$ 中的流减少 ε。显然 f^* 是一个流，而其值为 $v(f^*)=v(f)+\varepsilon$，这与 f 的最大性矛盾。这就证明了 $t\notin S$，故 $\vec{E}(S,\overline{S})$ 是分开 s 和 t 的割。

现在，$v(f)$ 等于用显然的方式

$$\sum_{x\in S,y\in\overline{S}}f(x,y)-\sum_{x\in\overline{S},y\in S}f(x,y)$$

定义的从 S 到 $\overline{S}$ 的流的值。依据 S 的定义，第一个和恰为：

$$\sum_{x\in S,y\in\overline{S}}c(x,y)=c(S,\overline{S}),$$

而第二个和中的每一加项均为零。因此，$c(S,\overline{S})=v(f)$，这

正是所要求的。 □

最大流最小割定理是本章介绍的各定理的基础。注意，如果某些边有无穷容量，但最大流的值仍是有限的，此定理仍然成立（证明是完全一样的）。

如果容量函数是整值的，即对每条边$\overrightarrow{xy}$，$c(x,y)$均为整数，这个定理的证明对于求具有最大值的流提供了一个非常有效的算法。我们从恒为零的流，即对每条边$\overrightarrow{xy}$，$f_0(x,y)=0$开始。构造流的一个递增序列f_0，f_1，…，它必终止于一个最大流：假设已经构造了f_i，像在上面证明中那样，寻求属于f_i的集S。现在，如果$t\notin S$，则f_i是最大流（而$\overrightarrow{E}(S,\overline{S})$是一个最小割），故这个序列就终止了。另一方面，如果$t\in S$，则可以用沿一条从s到t的路增加流的方法，把f_i扩充为流f_{i+1}。因为每个$v(f_i)$都是整数，故有$v(f_i)\geqslant v(f_{i-1})+1$，而序列至多在$\sum_{x,y}c(x,y)$步终止。

并且，如果c是整值的，算法构造的最大流也是整值的，即在每条边中其值均为整数。事实上，f_0是整值的，而如果f_{i-1}是整值的，则f_i也是整值的，因为f_i是从f_{i-1}出发，把一条路中的流增加一些整数的最小值而得到的。此结果常称为整性定理。

定理2. 如果容量函数是整值的，则存在其值也是整值的一个最大流。 □

当使用最大流最小割定理来寻求图中的各种路时，将用到这个简单结果。重要的是要注意，这个结果没有说唯一性：这个算法只是求最大流之一（通常有许多），而定理2也只断言

最大流之一是整值的。

该算法的存在同样也证明了其它一些直观上明显的结果。例如，存在最大的无圈流，即此流不包含环绕一个圈 $x_1x_2\cdots x_k$ 的流：

$$f(x_1,x_2)>0,f(x_2,x_3)>0,\cdots,f(x_{k-1},x_k)>0,$$
$$f(x_k,x_1)>0。$$

使人有些惊奇的是，如果我们取几个源和几个汇代替一个源和一个汇，情况不会变得更复杂，只须稍加小心地定义割即可。如果 $s_1,s_2,\cdots,s_k$ 是源，而 $t_1,t_2,\cdots,t_l$ 是汇，若对每个 $i,j(1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant l)$，$s_i\in S,t_j\in\overline{S}$，则说 $\overrightarrow{E}(S,\overline{S})$ 是一个割。

为了能应用最大流最小割定理，我们在 $\overrightarrow{G}$ 中添加一个新源 s 和一个新汇 t，并引具有无穷容量的全部边 $\overrightarrow{ss_i}$ 和 $\overrightarrow{t_jt}$。令 $\overrightarrow{H}$ 是用这种方法得到的图，考虑 $\overrightarrow{G}$ 中从 $s_1,\cdots,s_k$ 到 $t_1,\cdots,t_l$ 的流，流入（流出）源（汇）的总流不大于流出（流入）的总流。这些流易于扩充为 $\overrightarrow{H}$ 中的从 s 到 t 的流，而这种扩充建立了两个流集之间的一个 1—1 对应。并且，在 $\overrightarrow{H}$ 中分开 s 和 t 的具有有限容量的割，不能包含形如 $\overrightarrow{ss_i}$ 和 $\overrightarrow{t_jt}$ 的边，故它对应 $\overrightarrow{G}$ 中的具有同样容量的分开 $s_1,\cdots,s_k$ 和 $t_1,\cdots t_l$ 的割。这样一来，定理 1 就有下面的推广。

定理 3. 从一个源集到一个汇集的流的最大值等于分开源和汇的割的容量的最小值。 □

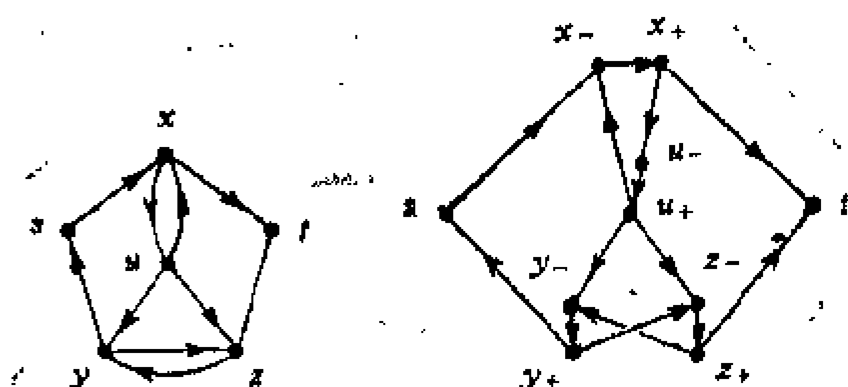
现在，假设有对于除源和汇外的顶点的容量限制，即我们有函数 $c:V-\{s,t\}\longrightarrow\mathbf{R}^+$，从而 s 到 t 的每个流 f 必须满足下面的不等式：对每个 $x\in V-\{s,t\}$，有

$$\sum_{y \in \Gamma^{+}(x)} f(x,y) = \sum_{z \in \Gamma^{-}(x)} f(z,x) \leqslant c(x)。$$

在这种情形下，我们怎样来定义割呢？一个**割**是$V-\{s,t\}$的一个子集S，使之不存在定义在$G-S$上的从s到t的正值流（为了区别两种割，有时称这种割为**顶点割**，而另一种叫做**边割**。但是，在问题中出现的是哪种割几乎总是明显的）。我们能把最大流最小割定理转换到这种情形中吗？是的，这是很容易的，只要注意，流也能解释成顶点中的流，即全部流在这个顶点的一部分流入而在这个顶点的另一部分流出。更正确地说，我们可以把$\vec{G}$的每个顶点变成边（不改变这个有向图的性质），其方法是，任何流入（流出）顶点的流将被迫通过此边。为做到这一点，将每个顶点$x \in V-\{s,t\}$用两个顶点x_-和x_+来代替，每条进入x的边指向x_-，而每条从x发出的边改从x_+发出。最后，从x_-到x_+引一条边，它有容量$c(x_-,x_+)=c(x)$（见图Ⅲ.2）。在$\vec{G}$中的满足在顶点上容量限制的从s到t的各个流与在新图$\vec{H}$的满足（某些）边上容量限制的各个流之间存在着一个简单的1—1对应。因为在$\vec{H}$中仅边$\overrightarrow{x_-x_+}$有有限容量，在$\vec{H}$中具有有限容量的边割完全由形如$\overrightarrow{x_-x_+}$的边组成，故它对应于$\vec{G}$中的一个具有同样容量的顶点割。这样，我们有定理1的下列形式：

定理4. 令$\vec{G}$是在除源s和汇t之外的其它顶点上具有有限容量限制的一个有向图，则顶点割的容量的最小值等于从s到t的流的最大值。 □

定理1、3和4可以很容易地结合成一个定理。我们把



图Ⅱ.2. 具有顶点上的容量限制的图 $\overrightarrow{G}$ 被具有边上的容量限制的图 $\overrightarrow{H}$ 代替。

它留给读者（练习 6）。

§2 连通度和 Menger 定理

我们曾讲过，如果一个图的任意两个顶点都能被路联结，则称此图是连通的，否则是不连通的。一个图 G 的极大连通子图称为 G 的一个分支。

如果 G 是连通的，而 $G-W$ 是不连通的，此处 W 是顶点集或边集的一个子集，则说 W **分开** G。如果在 $G-W$ 中两个顶点 s 和 t 属于不同的分支，则说 W **分开** s 和 t。如果 G 是 K^{k+1} 或 G 至少有 $k+2$ 个顶点且没有 $k-1$ 个顶点的集合分开 G，则说 G 是 k**—连通的**（$k\geqslant 2$）。同样，如果 G 至少有两个顶点，并且没有 $k-1$ 条边的集分开 G，则说 G 是 k**—边连通的**（$k\geqslant 2$）。一个连通图也说是 1—连通的或 1—边连通的。使连通图为 k—连通的 k 的最大值称为 G 的**连通度**，记作 $\kappa(G)$（如果 G 是不连通的，记 $\kappa(G)=0$）。**边连通度** $\lambda(G)$ 可类似地加以定义。

显然，一个图是 2—连通的当且仅当它是连通的、至少

有3个顶点且不包含割点。同样，一个图是2—边连通的当且仅当它是连通的、至少有两个顶点且不包含桥。一个给定的图连通度通常易于确定。这样，如果$1 \leqslant l \leqslant n$,则$\kappa(P^l) = \lambda(P^l) = 1$，$\kappa(C^n) = \lambda(C^n) = 2$，$\kappa(K^n) = \lambda(K^n) = n-1$和$\kappa(K^{l,n}) = \lambda(K^{l,n}) = l$。为了纠正顶点连通度等于边连通度的错觉，注意，如果由两个K^l的不相交并，再添加一个新顶点x，并把x与每个旧顶点联结起来，得到的新图为G，则$\kappa(G) = 1$，因为x是割点，但$\lambda(G) = l$（也见练习11）。最后这个例子表明，即使$\lambda(G)$很大时，$\lambda(G-x)$也可以为0。但是，由定义很容易看出，对于每个顶点x和边xy，有

$$\kappa(G) - 1 \leqslant k(G-x) \text{和} \lambda(G) - 1 \leqslant \lambda(G-xy) \leqslant \lambda(G)。$$

如果G是非平凡的（即至少有两个顶点），则参数$\delta(G)$，$\lambda(G)$和$\kappa(G)$满足下列不等式：

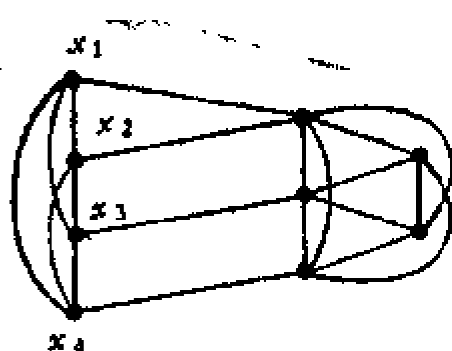
$$\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)。$$

事实上，如果删除与一个顶点关联的所有边，图就变成不连通的，故第二个不等式成立。为了得到另一个不等式，首先注意，如果G是完全图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = |G| - 1$；而如果$\kappa(G) \leqslant 1$，则$\lambda(G) = \kappa(G)$。现在假设$G$不是完全图且$\lambda(G) = k \geqslant 2$，而$\{x_1y_1, x_2y_2, \cdots, x_ky_k\}$是使$G$变成不连通的边集。如果$G - \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$是不连通的，则$\kappa(G) \leqslant k$。否则，像图Ⅲ.3所示那样，每个顶点$x_i$的度至多为$k$（因此恰为$k$）。删除$x_i$的邻接顶点就使$G$变成不连通的，因此$\kappa(G) = \lambda(G)$†。

---

† 此处只能导出$\kappa(G) \leqslant k = \lambda(G)$。——校注。

由顶点连通度的定义直接可得的另一个性质是：如果G_1和G_2是G的至少有k个公共顶点的k—连通子图$(k\geqslant 1)$，则$G_1\cup G_2$也是k—连通的。如果$W\subset V(G_1)\cup V(G_2)$至多有$k-1$个顶点，则$V(G_1)\cap V(G_2)\backslash W$中存在一个顶点$x$。因此，$G$的连通子图$G_1-W$和$G_2-W$至少有一个公共顶点$x$，故$G_1\cup G_2-W=(G_1-W)\cup(G_2-W)$是连通的。



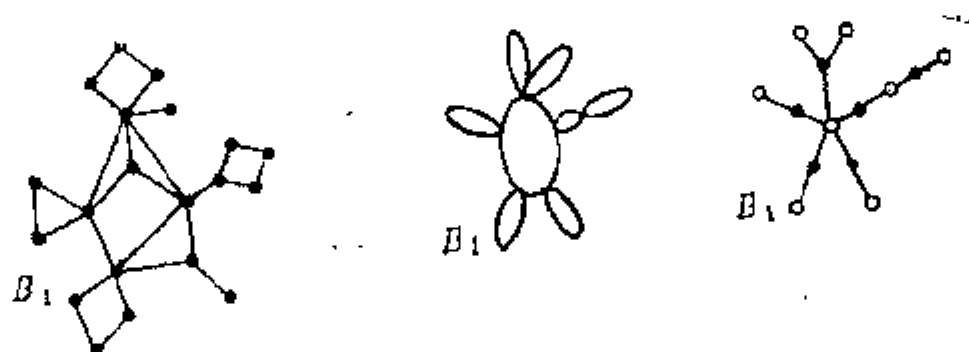
图Ⅱ.3. 一个4—边连通图，$G-\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$是连通的。

在第Ⅰ章中已经看到，把一个图分解成它的分支，即分解成它的极大连通子图，是很有益的，现在，我们试图用所有的极大2—连通子图来进行类似的分解。如果B是一条桥（和它的端点）或B是G的一个极大2—连通子图，则称B是G的一个**块**。上述结果表明，任意两个块至多有一个公共顶点，而且如果x,y是块B的两个不同的顶点，则$G-E(B)$不包含$x-y$路。因此，同时属于两个块的每个顶点是G的一个割点。反之，每个割点至少属于两个块。我们还记得，圈是2—连通的，并且一条边是桥当且仅当它不包含在任何圈中。我们发现，G可以以下述意义分解成它的块$B_1, B_2, \cdots, B_p$：

$$E(G)=\bigcup_1^p E(B_i)\text{和}E(B_i)\cap E(B_j)=\phi,\ i\neq j。$$

现在，假设G是一个非平凡的连通图。令$bc(G)$是这样的图，其顶点是G的块和G的割点，而其各条边联结割点和块：每个割点联结到包含它的各个块。称$bc(G)$为G的**块—割点图**，它是一棵树。$bc(G)$的每个端顶点是G的一个

块，称它们为G的**端块**。如果G是2—连通的或者它是K^2（一条"边"），则它仅包含一个块，即它自身；否则，至少存在两个端块。一个块是端块当且仅当它包含恰好一个割点（图Ⅲ.4）。



图Ⅲ.4．块—割点树$bc(G)$的构造，B_1是一个端块。

连通性理论的基本结果是Menger在1927年证明的。它可看作对（非有向）图的最大流最小割定理。回忆一下，两条$s—t$路仅有公共顶点s和t时，它们是独立的。

定理5.

(i)．令s和t是图G的两个不邻接的顶点，则分开s和t的顶点的最小数目等于独立的$s—t$路的最大数目。

(ii)．令s和t是G的两个不同的顶点，则分开s和t的边的最小数目等于边不重的$s—t$路的最大数目。

证明：(i) 用两条有向边$\overrightarrow{xy}$和$\overrightarrow{yx}$代替G中的每条边xy，且给除s和t之外的每个顶点以容量1。根据定理4，从s到t的最大流的值等于分开s和t的割的容量的最小值。根据整性定理（定理2），存在一个最大流，使每条边中的流为1或0。因此，从s到t的最大流的值等于独立的$s—t$路的最大数目。割容量的最小值显然是分开s和t的顶点的最小数目。

(ii) 象在(i)中那样去做。但不限制顶点的容量，而给每条有向边以容量1。 □

上面定理的两个部分分别称为 Menger 定理的顶点形式和边形式。我们能很容易地从顶点形式导出边形式(练习14)，但是，相反的推断不是容易证明的。因为我们已经提到过最大流最小割定理也可以从 Menger 定理导出，所以我们将从最基本的原理出发，给 Menger 定理的顶点形式以另一个证明。

Menger **定理顶点形式的第二种证明**：用 k 表示分开 s 和 t 的顶点的最小数目。显然，至多存在 k 条独立的 $s—t$ 路，而对 $k\leqslant 1$，存在 k 条独立的 $s—t$ 路。

假设定理不成立，取最小的 $k\geqslant 2$，使对这个 k 定理有一个反例，而令 G 是具有最少边数的这种反例(对于最小值 k)，则至多存在 $k—1$ 条独立的 $s—t$ 路，而且没有顶点 x 同时联结于 s 和 t，因为不然的话，$G—x$ 是对 $k—1$ 的反例。

令 W 是分开 s 和 t 的 k 个顶点的一个集。假设 s 和 t 都不邻接于 W 中的每个顶点。令 G_s 是从 G 用下述方法得到的图：把包含 s 的 $G—W$ 的分支用单个顶点 s' 代替，并联结 s' 于 W 中的每个顶点。在 G_s 中我们还需要用 k 个顶点来分开 s' 和 t，而且因为我们毁掉的分支至少有两个顶点，G_s 的边数比 G 的边数少。因为 G 是级最小的反例，在 G_s 中存在 k 条独立的 $s'—t$ 路。这 k 条路的从 t 到 W 的部分有下列性质：任意两个部分恰有一个公共顶点 t。特别是，对每个 $w\in W$，这些路中有一条是 $t—w$ 路。如果我们把 s 换成 t 实行类似的程序，则得到 k 条从 s 到 W 的路。这两个路集可以结合起来给出 k 条独立的 $s—t$ 路，这与我们的假设矛盾。因此，对分开 s 和 t 的任何 k 个顶点的集 W，或 s 或 t 与 W 的每个顶点邻接。

令 $sx_1x_2\cdots x_lt$ 是一条最短的 s—t 路，则 $l\geqslant 2$，且根据 G 的最小性，在图 $G-x_1x_2$ 中，可以找到一个分开 s 和 t 的 $k-1$ 个顶点的集 W_0。则 $W_1=\{x_1\}\cup W_0$ 和 $W_2=\{x_2\}\cup W_0$ 都是分开 s 和 t 的 k—集。因为 t 不联结于 x_1，故 s 联结于 W_1 中的每个顶点。同样，s 不联结于 x_2，故 t 联结于 W_2 的每个顶点。这蕴含着下列矛盾：s 和 t 至少有一个公共的邻接顶点，因为 W_0 中的每个顶点都是 s 和 t 的公共邻接顶点，而 $|W_0|=k-1\geqslant 1$。 □

推论6. 一个图是 k—连通的（$k\geqslant 2$），当且仅当它至少有二顶点且任何二个顶点都能被 k 条独立路联结。一个图是 k—边连通的（$k\geqslant 2$），当且仅当它至少有二顶点且任何二个顶点都能被 k 条边不重的路联接。 □

k—连通性的另一个特征在练习 12 中给出。

对应于多重源和汇的最大流最小割定理，有下面形式的 Menger 定理。如果 S 和 T 是图 G 的顶点集的任意两个子集，则顶点不重的（包括端点!）S—T 路的最大数目是 $\min\{|W|: W\subset V(G),\ G-W$ 中没有 S—T 路$\}$。为了能看清这一点，在 G 中添加两个新顶点 s 和 t，联结 s 与 S 中的每个顶点，并联结 t 与 T 中的每个顶点，然后把 Menger 定理应用于新图中的顶点 s 和 t。

§3 匹　　配

给定一个有限群 G 和它的一个指数为 m 的子群 H，能不能找到 G 的 m 个元素，比如说 $g_1, g_2, \cdots, g_m$，使 $\{g_1H, g_2H, \cdots, g_mH\}$ 是 H 的左陪集的集合，而 $\{Hg_1, Hg_2,$

$\cdots, Hg_m\}$是 H 的右陪集的集合吗?这个问题的另一种提法是下述的在数学各分支中经常出现的一个问题的特殊情形。给定一个集 X 的子集的一个类 $\mathbf{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$,我们能找到 X 的 m 个不同的元素, 使每个 A_i 含有其中的一个元素吗? 具有这些性质(即 $x_i \in A_i$; 且当 $i \neq j$ 就有 $x_i \neq x_j$)的集$\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$称为类 $\mathbf{A}$ 的一个**不同代表的集**。集类 $\mathbf{A}$ 可以自然而然地等同于具有顶点类 $V_1=\mathbf{A}$ 和 $V_2=X$ 的一个二部图, 在其中, $A_i \in \mathbf{A}$ 联结于包含在 A_i 中的每个元素 $x \in X$。这时, 不同代表的集是 m 条独立边的集(这样, V_1 中的每个顶点与这些边中的一条关联)。我们也说从 V_1 到 V_2 存在一个**完全匹配**。

习惯上常常用婚姻选配的形式来提出这个问题。给定 m 个女孩和 n 个男孩。倘若我们不想通过媒人使得一个女孩嫁给她根本不认识的男孩, 在什么条件下我们能把所有女孩嫁出去?

显而易见, 最大流最小割定理和 Menger 定理均蕴含完全匹配存在性的必要和充分条件。事实上, 由于二部图的特殊性质, 存在一个特别简单和有趣的充要条件。

如果有 k 个女孩, 她们总共认识 k—1 个男孩, 我们不能给这些女孩都找到适当的配偶。同样, 如果存在从 V_1 到 V_2 的完全匹配, 则对每个 $S \subset V_1$, 在 V_2 中至少存在$|S|$个顶点与 S 中的顶点邻接, 即

$$|\Gamma(S)| \geqslant |S|。$$

这个必要条件也是充分的。此结果通常称为 Hall 定理(Hall 在 1935 年证明了它, 而其一种等价形式在 1931 年被 König

gervary证明，但这两种变形都可

基于

用到最基本的原理。

定理7. 具有顶点类 V_1 和 V_2 的二部图 G 包含一个从 V_1 到 V_2 的完全匹配当且仅当对每个 $S\subset V_1$，有

$$|\Gamma(S)|\geqslant|S|。$$

我们已经看到此条件是必要的，故我们仅需证明其充分性。

第一种证明：Menger定理（象在§2末尾那样，应用于集 V_1 和 V_2）和最大流最小割定理（应用于从 G 用下述方法得到的有向图：为每一条边指定从 V_1 到 V_2 的方向，并使每个顶点有容量1）均蕴含下面的结果：如果 G 不包含从 V_1 到 V_2 的完全匹配，则存在 $T_1\subset V_1$ 和 $T_2\subset V_2$，使 $|T_1|+|T_2|<|V_1|$，且不存在从 V_1-T_1 到 V_2-T_2 的边。于是，$\Gamma(V_1-T_1)\subset T_2$，故

$$|\Gamma(V_1-T_1)|\leqslant|T_2|<|V_1|-|T_1|=|V_1-T_1|。$$

这就证明了条件的充分性。 □

第二种证明：在属于Halmos和Vaughan的这个证明中，我们使用做媒的说法。应用对女孩数 m 的归纳法。对 $m=1$，条件显然是充分的，故我们假设 $m\geqslant2$ 且对较小的 m 值条件是充分的。

首先假设任意 $k(1\leqslant k\leqslant m-1)$ 个女孩至少认识 $k+1$ 个

男孩。这时，我们任意安排一对配偶。剩下的女孩的集和男孩的集还满足该条件，因此，另外 $m-1$ 个女孩可根据归纳假设嫁出。

现在，假设对某个 k，存在 k 个女孩，她们总共认识恰好 k 个男孩。这些女孩显然可用归纳法假设嫁出去。其它女孩如何处理？如果不计已经娶亲的男孩，她们也满足条件，我们也可以把她们嫁出去（也根据归纳法假设）。现在，这个条件事实上是满足的，因为如果待嫁的某 l 个女孩认识少于 l 个剩下的男孩，则这些女孩再加上先前的 k 个女孩将认识少于 $k+l$ 个男孩。 □

第三种证明：这个证明属于 Rado。令 G 是满足条件的一个极小图，只要证明，G 由 $|V_1|$ 条独立边组成即可。

如果不是这样，则 G 包含形如 a_1x, a_2x 的两条边，此处 $a_1, a_2 \in V_1$ 和 $x \in V_2$。因为删去这两条边的随便哪一条，都将使条件不成立，故存在这样的集 $A_1, A_2 \subset V_1$，使 $|\Gamma(A_i)| = |A_i|$，且 a_i 是 A_i 中邻接于 x 的唯一的顶点（$i=1,2$）。于是

$$
\begin{aligned}
&|\Gamma(A_1) \cap \Gamma(A_2)| \\
&= |\Gamma(A_1 - \{a_1\}) \cap \Gamma(A_2 - \{a_2\})| + 1 \\
&\geqslant |\Gamma(A_1 \cap A_2)| + 1 \geqslant |A_1 \cap A_2| + 1,
\end{aligned}
$$

这蕴含下面的矛盾：

$$
\begin{aligned}
&|\Gamma(A_1 \cup A_2)| \\
&= |\Gamma(A_1) \cup \Gamma(A_2)| = |\Gamma(A_1)| + |\Gamma(A_2)| \\
&\quad - |\Gamma(A_1) \cap \Gamma(A_2)| \leqslant |A_1| + |A_2| \\
&\quad - |A_1 \cap A_2| - 1。
\end{aligned}
$$

□

证则二部图满足 Hall 定理的条件，故它有完全匹配。这进一步蕴含：我们确实可以找到群的元素 $g_1, g_2, \cdots g_m$，满足这一节开头的要求。

我们用不同代表的集的说法来重新陈述婚姻定理。

定理 7′. 一个集类 $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 有不同代表的集当且仅当对每个 $F \subset \{1, 2, \cdots, m\}$ 有

$$\left|\bigcup_{i \in F} A_i\right| \geqslant |F|。 \qquad \square$$

婚姻定理有两个自然的推广。假设配偶条件不满足，要求将女孩尽量地嫁出去，我们能做到什么程度？什么时候我们能嫁出除其中的 d 个之外的所有其余的女孩？显然，她们中的任意 k 个必须要认识至少 $k-d$ 个男孩。这个显然的必要条件也是充分的。

推论 8. 假设具有顶点类 V_1 和 V_2 的二部图 $G = G_2(m, n)$ 满足下述条件：对每个 $S \subset V_1$ 有

$$|\Gamma(S)| \geqslant |S| - d。$$

则 G 包含 $m-d$ 条独立边。

证明： 在 V_2 中添加 d 个顶点，并把它们与 V_1 中的每个顶点联结。新图 G^* 满足完全匹配的条件。在这个匹配中，至少有 $m-d$ 条边属于图 G。 $\square$

下面的推广是在一夫多妻的国家中有关男孩的配偶问题，此处第 i 个男孩想要 d_i 个女孩为妻。

推论 9. 令 G 是具有顶点类 $V_1 = \{x_1, \cdots, x_m\}$ 和 $V_2 =$

$y_1, \cdots, y_n\}$的二部图。则 G 包含满足 $d_H(x_i)=d_i$ 和 $0 \leqslant d_H(y_i) \leqslant 1$ 的子图 H 当且仅当对每个 $S \subset V_1$ 有

$$|\Gamma(S)| \geqslant \sum_{x_i \in S} d_i。$$

证明：用与 $\Gamma(x_i)$ 中的每个顶点联结的 d_i 个顶点代替每个 x_i，则存在子图 H 当且仅当新图有从新的第一个顶点类到 V_2 的匹配。由定理 7 就得到结论。 □

当然，推论 9 也有一个亏形式，希望读者陈述并由推论 9 推导之。

读者可能发现，这些推论还是最大流最小割定理的特殊情形。事实上，最大流最小割定理的二部图说法比上面的推论更为一般。

定理 10．令 $G=G_2(m,n)$是具有顶点类 $V_1=\{x_1, \cdots, x_m\}$和 $V_2=\{y_1, \cdots y_n\}$的二部图。对 $S \subset V_1$ 和 $1 \leqslant j \leqslant n$，用 s_j 表示从 y_j 到 S 的边的数目。令 $d_1, \cdots, d_m$ 和 $e_1, \cdots, e_n$ 是一些自然数，并令 $d \geqslant 0$。则存在 G 的子图 H，使

$$e(H) \geqslant \sum_1^n d_i - d,$$

$$d_H(x_i) \leqslant d_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

和

$$d_H(y_j) \leqslant e_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

当且仅当对每个 $S \subset V_1$ 有

$$\sum_{x_i \in S} d_i \leqslant \sum_{j=1}^n \min\{s_j, e_j\} + d。$$

证明：给每条边以从 V_1 到 V_2 的方向，把 G 变成有向图 $\vec{G}$。给每条边以容量 1，给顶点 x_i 以容量 d_i 和顶点 y_j 以容量 e_j，则存在具有所要求性质的子图 H 当且仅当在 $\vec{G}$ 中

存在从 V_1 到 V_2 的其值至少为 $\sum_1^m d_i-d$ 的流，而根据最大流最小割定理，后者成立当且仅当每个割有至少为 $\sum_1^m d_i-d$ 的容量。现在，最小割集均具有形式 $T\cup U\cup E(V_1-T, V_2-U)$，此处 $T\subset V_1$ 和 $U\subset V_2$。给定集 T，如果一个顶点 y_i 属于 U，这样的一个割的容量为最小当且仅当它的容量小于从 $S=V_1-T$ 到 y_i 的边数。对于这样选取的 U，这个割的容量恰为

$$\sum_{x_i\in T} d_i+\sum_1^n \min\{s_i, e_i\}。$$

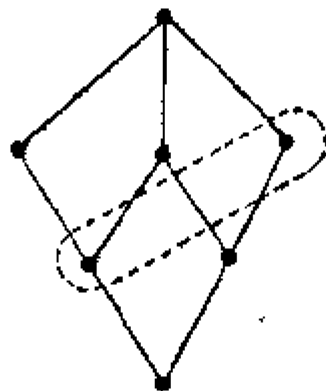
上式至少为 $\sum_1^m d_i-d$ 的条件显然就是定理中的条件。 □

请读者验证，定理 7 的第二个证明可以逐句地重写，给出这个结果的精确形式（即 $d=0$ 的情形）的证明，而亏形式（情形 $d\geqslant 0$）可以由它导出，这正象由定理 7 导出推论 8 那样（练习 26）。

为了结束这一节，我们来证明婚姻定理的另一个推广。这是关于偏序集的 Dilworth 定理。在一个集上的一个**偏序** $<$ 是定义在一些元素的某些有序对上的传递的和反对称的关系。也就是说，如果 $x<y$ 和 $y<z$，则 $x<z$，但 $x<y$ 和 $y<x$ 不能同时成立。其上有偏序关系的集称为**偏序集**。用 $x\leqslant y$ 表示 $x=y$ 或 $x<y$。设 C 是偏序集 P 的一个子集，如果对于 $x,y\in C$，或 $x\leqslant y$ 或 $y<x$，则说 C 是一条**链**（或一个塔）。如果 $x<y$ 蕴含 $\{x,y\}\not\subset A$，则说 A 是一条**反链**，

参看图Ⅱ.5中的例子。

我们把偏序集分解成链，这样的链最少要多少条？因为一条反链的两个元素不能属于同一条链，我们至少需要一条含最少元素的反链中的元素数目那么多的链。事实上，这个平凡的必要条件也是充分的。



图Ⅱ.5. 一个偏序集和一条级大反链（一条边表明它的上端点大于它的下端点）。

定理 11. 如果在一个（有限的）偏序集 P 中，每条反链至多有 m 个元素，则 P 是 m 条链的并。

证明： 我们应用对 $|P|$ 的归纳法。如果 $|P|=0$，不需证明什么，故我们假设 $|P|>0$ 和对于有较少元素的集定理成立。

令 C 是 P 中的一条极大链（即如果 $x\notin C$，则 $C\cup\{x\}$ 就不是链）。如果 $P-C$ 没有有 m 个元素的反链，则根据归纳法立即得出结论。因此，我们可以假设 $P-C$ 包含一条反链 $A=\{a_1, \cdots, a_m\}$。

定义 A 的**下影**为

$$S^-=\{x\in P\text{：对某个 } i,\ x\leqslant a_i\},$$

并且类似地定义 A 的**上影** S^+。则 P 是两个影的并，因为否则的话，A 可以扩充为具有 $m+1$ 个元素的反链。并且上影和下影均不是整个 P，因为 C 的极大元素不属于 S^-，而 C 的极小元素不属于 S^+。根据归纳假设，两个影都可以分解成 m 条链，比如说

$$S^- = \bigcup_1^m C_i^- \quad 和 \quad S^+ = \bigcup_1^m C_i^+。$$

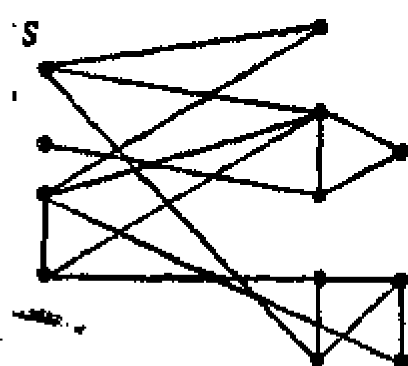
因为不同的 a_i 属于不同的链，我们可以假设 $a_i \in C_i^-$ 和 $a_i \in C_i^+$。

如果能证明 a_i 是 C_i^- 的极大元素且又是 C_i^+ 的极小元素，证明就完成了。因为在这种情形下，链 C_i^- 和链 C_i^+ 可以串接起来，给出一条链 C_i，这时有 $P = \bigcup_1^m C_i$。

假设 a_i 不是 C_i^- 的极大元素，即对某个 $x \in C_i^-$，$a_i < x$。因为 x 是在 A 的下影中，故存在 $a_j \in A$，使 $x \leqslant a_j$。但是，这蕴含矛盾 $a_i < a_j$。 □

§4 Tutte的1—因子定理

一个图的一个**因子**是一个子图，它的顶点集是整个图的顶点集。如果一个因子的每个顶点的度均为 r，则称它为一个 **r—因子**。我们怎样给出具有1—因子的图的特征呢？如果图 G 有1—因子 H，而我们删去 G 的顶点的一个集 S，则在 $G-S$ 的一个分支 C 中，有偶数个顶点是在 H 的包含于 C 中的边上，而 C 的其它顶点是在 H 的联结 C 的顶点与 S 的顶点的边上。特别是，对于 $G-S$ 的每个奇分支 C（即有奇数个顶点的分支）存在 H 的一条边，它联结 C 的一个顶点和 S 的一个顶点。



图Ⅱ.6．具有1—因子的一个图：$|S|=4$，而 $G-S$ 有两个奇分支。

现在，因为 H 的边是独立的，所以这就蕴含图 $G-S$ 至多

有$|S|$个奇分支，即对S中的每个顶点都有一个奇分支（见图Ⅱ.6）。

我们找到的条件的必要性颇为平凡，但是，此条件的充分性就不明显了。这个惊人的、深刻的结果首先由Tutte在1947年证明。用$q(H)$表示图H的奇分支数，即奇阶分支的数目。

定理 12. 图G有1—因子当且仅当对每个$S\subset V(G)$有

$$q(G-S)\leqslant|S|。\qquad (*)$$

证明： 我们已经知道这个条件是必要的。我们将对G的阶进行归纳来证明充分性，对于$|G|=0$，不需要证明什么。现在，假设G是满足（$*$）的至少为一阶的图，并且假设对较小阶的图定理成立。

令$S_0\subset V(G)$是一个非空子集，对于它，($*$)中的等号成立。$m=|S_0|\geqslant1$，用C_1，C_2，…，C_m表示$G-S_0$的奇分支，且令D_1，D_2，…，D_k是$G-S_0$的偶分支。如果定理成立，而且G确实包含一个1—因子F，则对每个C_i，至少存在F的一条边，它联结C_i中的一个顶点和S_0中的一个顶点。因为$m=|S_0|$，对每个C_i恰存在一条这样的边c_is_i，$c_i\in C_i$，$s_i\in S_0$。每个C_i-c_i包含一个1—因子(F的一个子图)而且每个D_i包含一个1—因子（F的一个子图）。最后，边s_1c_1，s_2c_2，…，s_mc_m构成一个从S_0到集$\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$的完全匹配。

这个证明是基于下列事实：我们能找到一个S_0，它有上面叙述的所有性质。我们怎样来找出这个集S_0呢？令S_0

是 $V(G)$ 的一个极大非空子集，它使(*)中的等号成立。当然，这样一个集的存在不是一开始就很明显的。对于 $S=\phi$，条件(*)蕴含 G 的阶为偶数。如果 s 是 G 的任意一个顶点，则 $G-\{s\}$的阶为偶数，所以它至少有一个奇分支。因为(*)成立，$G-\{s\}$ 恰有一个奇分支。因此，对每个 $S=\{s\}$，在(*)中等号成立。这就说明了 S_0 的存在。

如前，设 C_1，C_2，…，$C_m(m=|S_0|)$ 是 $G-S_0$ 的奇分支，而 D_1，D_2，…，D_k 是偶分支。

(i) 每个 D_l 有一个 1—因子。事实上，如果 $S\subset V(D_l)$，则

$$q(G-S_0\cup S)=q(G-S_0)+q(D_l-S_0)$$
$$\leqslant|S_0\cup S|=|S_0|+|S|,$$

故

$$q(D_l-S)\leqslant|S|。$$

因此，根据归纳假设，D_l 有 1—因子。

(ii) 如果 $c\in C_i$，则 C_i-c 有 1—因子。假设这一点不成立，则依归纳假设，存在一个集 $S\subset V(C_i)-\{c\}$，使

$$q(C_i-\{c\}\cup S)>|S|。$$

因为

$$q(C_i-\{c\}\cup S)+|S\cup\{c\}|\equiv|C_i|\equiv1(\text{mod}2),$$

这蕴含

$$q(C_i-\{c\}\cup S)\geqslant|S|+2。$$

因此

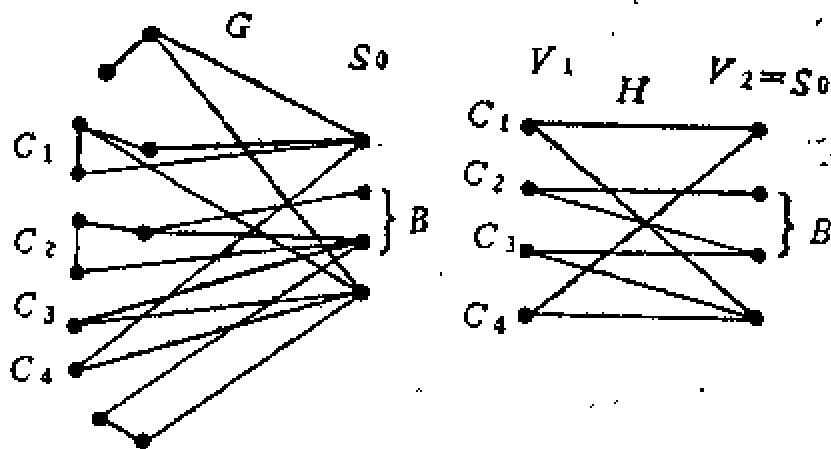
$$|S_0\cup\{c\}\cup S|=|S_0|+1+|S|\geqslant q(G-S_0\cup\{c\}\cup S)$$
$$=q(G-S_0)-1+q(C_i-\{c\}\cup S)$$
$$\geqslant|S_0|+1+|S|,$$

故在(*)中对集$S_0 \cup \{c\} \cup S$等式同样成立。这与S_0的极大性矛盾。

(iii) G包含形如$s_i c_i (s_i \in S_0, c_i \in C_i, i=1, 2, \cdots, m)$的$m$条独立边。为了证明这一点，我们考虑有顶点类$V_1=\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$和$V_2=S_0$的二部图$H=G_2(n, m)$，在其中，$C_i$联结$S_0$中的一个顶点$s$当且仅当$G$包含从$s$到$C_i$的一条边。上述断言是真实的当且仅当$H$有一个1—因子，它是从$V_1$到$V_2$的一个匹配。幸而我们已经得到了检查这个匹配存在的工具，即Hall定理。给定$A \subset V_1$，记$B=\Gamma_H(A) \subset V_2$（见图Ⅱ.7），则(*)蕴含

$$|A| \leqslant q(G-B) \leqslant |B|。$$

因此，图G满足Hall定理的条件，故它有1—因子。



图Ⅱ.7. 由G构造H。集$A=\{C_2, C_3\}$用规则$B=\Gamma_H(A)$确定$B \subset S_0$。

差不多我们就可以完成证明了。为了完成证明，我们来综合(i)、(ii)和(iii)的信息。从m条独立边$s_i c_i (s_i \subset S_0, c_i \in C_i)$开始。把每个$C_i - c_i$的一个1—因子$(1 \leqslant i \leqslant m)$和每个$D_j$的一个1—因子$(1 \leqslant j \leqslant k)$添加到这个边集中，就得

到 G 的一个 1—因子。 □

要得到上面结果的亏形式，又是很容易的事了。

推论 13. 图 G 包含至多除去 d 个顶点之外覆盖其余全部顶点的独立边集当且仅当对每个 $S\subset V(G)$ 有

$$q(G-S)\leqslant|S|+d。$$

证明： 因为没被独立边集覆盖的顶点的数目模 2 同余于 $|G|$，我们可以假设

$$d\equiv|G|(\mathrm{mod}2)。$$

记 $H=G+K^d$，即令 H 是由 G 添加 d 个顶点的一个集 W，并联结每个新顶点与另外的每个新的和旧的顶点而得到的图，则 G 包含除 d 个顶点外覆盖其余全部顶点的独立边的一个集当且仅当 H 有一个 1—因子。对于 H，（＊）什么时候成立呢？如果 $W-S'\neq\phi$，则 $H-S'$ 是连通的，故 $q(H-S')\leqslant1$，而此时（＊）成立；如果 $W\subset S'$，则对于 $S=S'-W$，我们有 $q(H-S')=q(G-\{S'\backslash W\})=q(G-S)$，故（＊）等同于

$$q(G-S)\leqslant|S'|=|S|+d。\qquad \square$$

〔练习〕

1⁻. 假设 F 是边的一个集，而且，把这些边删去之后，不存在从 s 到 t 的具有正值的流。证明：F 包含分开 s 和 t 的割。

2⁻. 用适当的联立方程组来证明割的容量至少象流的最大值那样大。

3⁻. 令 $\vec{G}=(V,\vec{E})$ 是一个有向图，且令 c 是 $\vec{E}$ 上的广

义值容量函数（即$c(x, y)$是非负实数或$+\infty$）。令s和t是两个顶点。证明：或存在一个从s到t的具有无穷值的流，或存在一个具有最大有限值的流。

4. 用相继减少$\overrightarrow{G}$中循环流的数目的方法证明：存在一个没有循环流的最大流，在其中没有流流入源，也没有流流出汇。

5. 使用练习4的方法证明：如果容量函数是整值的，则存在整值的最大流。

6. 对于在边和顶点上具有有界容量并且有多重源和汇的情形，陈述并证明最大流最小割定理。

7. （环流定理）在一个有向图$\overrightarrow{G}$中的一个**环流**是一个没有源和汇的流。对每条边$\overrightarrow{xy}$给定一个下容量$l(x, y)$和一个上容量$c(x, y)$，$0 \leqslant l(x, y) \leqslant c(x, y)$，如果对每条边$\overrightarrow{xy}$有

$$l(x, y) \leqslant g(x, y) \leqslant c(x, y),$$

我们称环流g是**可行的**. 证明：存在可行的环流当且仅当对每个$S \subset V$有

$$l(S, \overline{S}) \leqslant c(\overline{S}, S)。$$

〔注意，条件的必要性是平凡的，因为，在可行环流中，函数l迫使从S到$\overline{S}$至少有流$l(S, \overline{S})$，而函数c允许从S到$\overline{S}$至多有流$c(\overline{S}, S)$。为了证明充分性，添加一个源s和一个汇t到$\overrightarrow{G}$中，从s到$\overrightarrow{G}$的每个顶点都引一条边，并从$\overrightarrow{G}$的每个顶点都向t引一条边。在新图$\overrightarrow{G^*}$的边集上定义容量函数$c^*(x, y)$：$c^*(x, y) = c(x, y) - l(x, y)$，$c^*(s, x) = l(V, x)$和$c^*(x, t) = l(x, V)$。则关系式

$$f(x, y) = g(x, y) - l(x, y)$$

建立了$\overrightarrow{G}$中的可行环流g和$\overrightarrow{G^*}$中的从s到t的具有值$l(V, V)$的流之间的一个1—1对应。以在此结果中所要求的形式重写在最大流最小割定理中给出的条件。〕

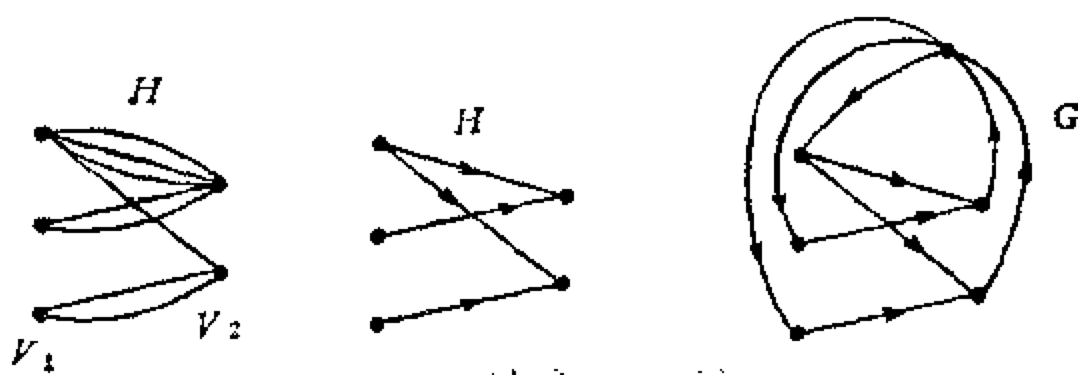
8^+. 令H是无自环的二部重图，它有顶点类V_1和V_2。（即H可以包含重边，也就是属于不同类的两个顶点可以被若干条边联结，这些边称为**平行的**。）通常，给定一个顶点x，用$\Gamma(x)$表示与x并联的边集，而用$d(x)=|\Gamma(x)|$表示x的度。证明：给定任一自然数k，边集E可以被划分成集E_1，E_2，…，E_k，使对每个顶点x和每个集E_i有

$$\left\lfloor\frac{d(x)}{k}\right\rfloor\leqslant\left|\Gamma(x)\cap E_i\right|\leqslant\left\lceil\frac{d(x)}{k}\right\rceil,$$

此处，本书的其它部分亦如此，$\lceil z\rceil$是不小于z的最小整数，而$\lfloor z\rfloor=-\lceil -z\rceil$。

这样，如果我们把划分$\bigcup\limits_1^k E_i$看作用k种颜色对边的一种着色，则这个着色是**公正的**，即在每个顶点处颜色的分布尽可能相等。〔提示：由H构造一个有向图$\overrightarrow{H}=(V_1\cup V_2, \overrightarrow{E})$，从$x$向$y$引一条边当且仅当$x\in V_1$和$y\in V_2$，且$H$至少包含一条边$xy$。令$\overrightarrow{G}$是由$\overrightarrow{H}$添加一个顶点$u$和所有边$\overrightarrow{ux}$，$\overrightarrow{yu}$，$x\in V_1$，$y\in V_2$，而得到的有向图，如图Ⅱ.8所示。对$\overrightarrow{G}$的每条边定义适当的下容量和上容量，并证明存在一个可行的整值环流。使用这个环流定义各颜色类中的某一个。〕

9. （练习8^+的继续）证明：除了上面的性质之外，我们可以要求颜色类尽可能相等，比如说$|E_1|\leqslant|E_2|\leqslant\cdots\leqslant|E_k|\leqslant|E_1|+1$，且在平行边的每个集中，颜色的分布尽



图Ⅱ.8. 图H，$\overrightarrow{H}$和$\overrightarrow{G}$。

可能相等。

10. 令$d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n$是图$G$的度序列，假设对$j=1,2,\cdots,n-1-d_{n-k+1}$有

$$d_j \geqslant j+k-1。$$

证明：G是k—连通的。

11. 令k和l是整数，$1 \leqslant k \leqslant l$。构造图$G_1$，$G_2$和$G_3$，使

(i) $\kappa(G_1)=k$和$\lambda(G_1)=l$。

(ii) $\kappa(G_2)=k$和对某个顶点x有$\kappa(G_2-x)=l$。

(iii) 对某条边xy有$\kappa(G_3-x)=k$和$\lambda(G_3-xy)=l$。

12. 给定$U \subseteq V(G)$和一个顶点$x \in V(G)-U$，一个x—U**扇**是从x到U的$|U|$条路的集，其中任意两条路恰有一个公共顶点x。证明：一个图G是k—连通的当且仅当$|G| \geqslant k+1$和对任何k—集$U \subset V(G)$与不在U中的一顶点x，在G中存在x—U扇。〔提示：给定一个对(x, U)，在G中添加一个新顶点u，并把u与U的每个顶点联结起来。验证：如果G是k—连通的，则新图也是k—连通的。对x和u应用Menger定理。〕

13. 证明：如果G是k—连通的($k\geqslant 2$)和$\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}\subset V(G)$，则在$G$中存在一个圈，它包含所有$x_i$，$1\leqslant i\leqslant k$。

14. 图$G=(V, E)$的**线图**$L(G)$是这样一个图，它有顶点集E，而且两个顶点$\alpha, \beta\in E$邻接当且仅当在G中它们恰有一个公共顶点。把Menger定理的顶点形式应用于线图$L(G)$，证明：Menger定理的顶点形式蕴含边形式。

15. 证明：如果$\lambda(G)=k\geqslant 2$，则在G中删除k条边所得到的图至多有2个分支。对点连通性有类似的结果吗？

16. 令G是具有最小度$\delta(G)=k\geqslant 1$的连通图。证明：G包含一条路$x_1x_2\cdots x_k$，使$G-\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$也是连通的。〔提示：令$x_1x_2\cdots x_l$是一条最长的路。注意，$l\geqslant k+1$。假设$G-\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$是不连通的，而令$y_0y_1\cdots y_m$是不包含$x_{k+1}x_{k+2}\cdots x_l$的在一个分支$C$中的一条最长的路，则$d_c(y_0)\leqslant m$，但$y_0$不能与顶点$x_1, x_2, \cdots, x_k$的$k-m$个联结。〕

17. 令$G=G_2(m,n)$是具有顶点类V_1和V_2且包含从V_1到V_2的一个匹配的二部图。

(i) 证明：存在一个顶点$x\in V_1$，使对每条边xy，存在一个包含xy的从V_1到V_2的匹配。

(ii) 推导：如果对每个$x\in V_1, d(x)=d$，则当$d\leqslant m$时，G至少包含$d!$个匹配；当$d>m$，G至少包含$d(d-1)\cdots(d-m+1)$个匹配。

18. 令$A=(a_{ij})_1^n$是一个$n\times n$**随机矩阵**，即对所有的i,j，有$a_{ij}\geqslant 0$，和$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1$。证明：$A$在$n\times n$置

换矩阵的凸壳中，即存在这样的 λ_i，$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$，和置换矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_m$，使 $A=\sum_{1}^{m}\lambda_i P_i$。〔提示：令 $a_{ij}^*=\lceil a_{ij}\rceil$，$A^*=(a_{ij}^*)_1^n$，并令 $G=G_2(n,n)$ 是自然而然地系于 A^* 的二部图。证明 G 有完全匹配，并导出存在置换矩阵 P 和实数 λ，$0<\lambda\leqslant 1$，使 $A-\lambda P=B=(b_{ij})_1^n$，此处，对所有 i, j，有 $b_{ij}\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{n}b_{ij}=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}=1-\lambda$，并且 B 至少比 A 多一个 0 元素。〕

19．在 $1,2,\cdots,n$ 上的一个 $r\times s$ **拉丁矩形**是一个 $r\times s$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，其每个元素是整数 $1,2,\cdots,n$ 之一，并且每个这样的整数在 A 的每一行和每一列中最多出现一次。证明每个 $r\times n$ 拉丁矩形可以扩充成一个 $n\times n$ **拉丁正方形**。〔提示：假设 $r<n$，并把 A 扩充成一个 $(r+1)\times n$ 拉丁矩形。令 A_j 是 $a_{r+1,j}$ 可能值的集，即令 $A_j=\{k;\ 1\leqslant k\leqslant n, k\neq a_{ij}\}$。验证 $\{A_j;\ 1\leqslant j\leqslant n\}$ 有不同代表的集。〕

证明：在 $1,2,\cdots,n$ 上至少存在 $n!(n-1)!\cdots(n-r+1)!$ 个不同的 $r\times n$ 拉丁矩形。〔提示：应用练习 17(ii)。〕

20．令 A 是一个 $r\times s$ 拉丁矩形，用 $A(i)$ 表示符号 i 在 A 中出现的次数。证明：A 可以扩充成 $n\times n$ 拉丁正方形当且仅当对每个 $i=1,2,\cdots,n$，$A(i)\geqslant r+s-n$。

21．证明 Schröder—Bernstein 定理的下面形式：令 G 是其顶点类 X 和 Y 具有任意基数的一个二部图。令 $A\subset X$ 和 $B\subset Y$，假设存在从 A 到 Y 和从 B 到 X 的完全匹配。证

明G包含复盖$A\cup B$的全部顶点的独立边集。〔提示：考虑上述两个匹配的并的各个分支。〕

22. 由练习20推导：每个二部图都包含一个独立边集，使每个最大度顶点（即度为$\Delta(G)$的顶点）与这些边之一关联。推导：非空的正则二部图都有1—因子。

23. 如果$r-k\leqslant\delta(G)\leqslant\Delta(G)\leqslant r$，我们说$G$是一个$(r,\ r-k)$—**正则图**。证明：对$1\leqslant k\leqslant s\leqslant r$，每个$(r,r-k)$—正则图都包含一个$(s,\ s-k)$—正则因子。〔提示：假设$s=r-1$，取一个极小$(r,r-k)$—正则因子。注意，在这个因子中，没有两个$r$度顶点是邻接的。删除复盖$r$度顶点的独立边的一个集。〕

24⁻. 一般拓扑中的Tychonov定理如下：紧致空间的任意类的积是紧致的。由此推导Hall定理的下述推广：

令G是具有顶点类X和Y的无限二部图，使X中的每个顶点与有限多条边关联，则存在一个从X到Y的完全匹配当且仅当对X的每个有限子集A，都有$|\Gamma(A)|\geqslant|A|$。

证明有限条件不能省略。

25. 证明：2—边连通的三次图有1—因子。〔这个结果称为Petersen定理。为了证明它，检查Tutte定理的条件是满足的。如果$\phi\neq S\subset V(G)$且C是$G-S$的一个奇分支，因为G是2—边连通的，则至少存在两条S—C边。并且，因为G是三次的，至少存在三条S—C边。推导$q(G-S)\leqslant|S|$。〕

26. 仿照定理7的第二种证明，给出定理10在情形$d=0$时的一个直接证明，然后，由它导出$d\geqslant0$的一般情

形。

27. 令 G 是至多有 $r\geqslant 2$ 个独立顶点的 n 阶图。证明：如果 $\overrightarrow{G}$ 是 G 的不包含有向圈的任意一个定向（无圈定向），则 $\overrightarrow{G}$ 包含一条长至少为 $\lceil n/r\rceil-1$ 的有向路。〔提示：应用 Dilworth 定理——定理 11。〕

28. 由练习 27 导出下面的结果：给定由 $rk+1$ 个不同自然数组成的一个集，或存在一个由 $r+1$ 个数组成的集，其中没有一个数能除尽另外 r 个数中的任何一个；或者存在一个序列 $a_0<a_1<\cdots<a_k$，使得当 $0\leqslant i<j\leqslant k$，则 a_i 除尽 a_j。

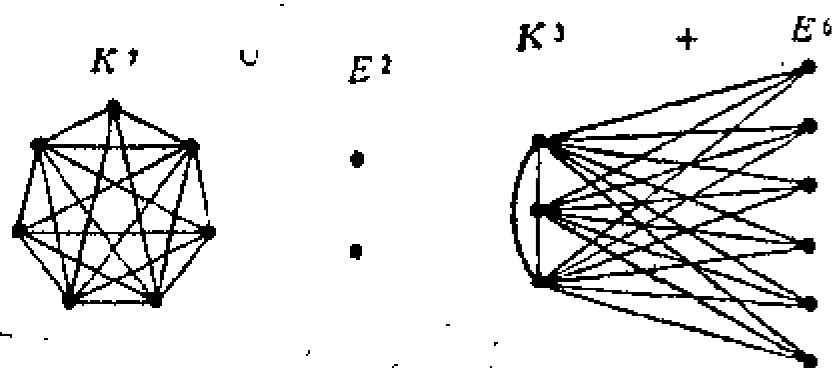
29. 描述所有不包含 1—因子的 $n=2l$ 阶极大图。〔提示：应用 Tutte 定理（定理 12）解答。〕

30. （参看练习 29）描述所有包含至多 k 条独立边的 n 阶极大图。〔提示：应用推论 13。〕

31. 利用练习 30 和二项式系数 $\binom{x}{2}$ $(x\geqslant 2)$ 的凸性证明：如果 $n\geqslant k+1$，则具有至多 k 条独立边的 n 阶图的最大级是

$$\max\left\{\binom{2k+1}{2},\binom{k}{2}+k(n-k)\right\}。$$

也证明：极图(即使等号成立的图)是图 $K^{2k+1}\cup E^{n-2k-1}$



图Ⅲ.9. 对 $k=3$, $n=9$, 存在两个极图 $K^7\cup E^2$ 和 K^3+E^6。

和 K^k+E^{n-k} 中之一或二者。（见图Ⅱ.9）

32．如果存在一个图 G，其顶点集为 $V(G)=\{x_1,x_2\cdots,x_n\}$，且 $d(x_i)=d_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，则称整数序列 d_1，d_2，…，d_n 是**可图的序列**。（图 G 称为**实现**(d_i)?）。证明：$d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_n$ 是可图的序列当且仅当序列

$$d_2-1,d_3-1,\cdots,d_{d_1+1}-1,d_{d_1+2},d_{d_1+3},\cdots,d_n$$

也是可图的序列。

33．使用上一个练习给出的算法确定，下面序列中哪些是可图的序列：5,4,3,2,2,2；5,4,4,2,2,1；4,4,3,3,2,2,2和5,5,5,4,2,1,1，1。画出由这种算法构造的实现相应的序列的图。

注

关于流的基本书籍是L. R. Ford, Jnr. and D. R. Fulkerson, Flows in Networks, Princeton University Press, Princeton, 1962。它不仅包含本书讲述的关于流和环流的全部结果，也有若干对标准的最优化问题的应用。

Menger, Hall 和 Tutte 的三个基本定理是在下列文章中论述，K. Menger, Zur allgemeinen Kurventheorie, Fund. Math. 10(1927)96—115, P. Hall, On representatives of subsets, J. London Math. Soc. 10(1935)26—30, 和 W. T. Tutte, A factorization of linear graphs, J. London Math. Soc. 22(1947)107—111。我们给出的 Tutte 定理的证明属于 T. Gallai, Neuer Beweis eines Tutte'schen Satzes, Magyar Tud. Akad. Közl. 8(1963) 135—139, 并且 I. Anderson也独立地证明了这一定理，见于 I. Anderson, Perfect matchings in a graph, J. Combinatorial Theory Ser. B 10(1971)183—186, W. Mader 也独立地证明了这一定理，见于他的文章：Grad und lokaler Zusammenhang in endlichen Graphen, Math. Ann. 205(1973)9—11。练习 8 和 9 中的结果属于 D. de Werra, Multigraphs with quasiweak odd cycles, J

Combinatorial Theory Ser. B 23(1977)75—82。

练习23中的结果稍为简单的形式属于W.T.Tutte；在提示中说明的证明由C.Thomassen得到。关于连通性和匹配的结果的广泛的综述可在下书的第I章和第II章中找到：B.Bollobás, Extremal Graph Theory, Academic Press, London and New York, 1978。

第Ⅳ章 极 值 问 题

一个 n 阶图至少要有多少条边才一定包含一条长为 l 的路呢？包含一个长至少为 l 的圈呢？包含一个长至多为 l 的圈呢？包含一个完全图 K^r 呢？这些问题都是所谓禁用子图问题的特殊情形：给定一个图 F，确定 $ex(n;F)$，此处 $ex(n;F)$ 是不包含 F 的 n 阶图的最多边数。禁用子图问题是图论中相当大的一类**极值问题**的一个主要例子。在这一章中，我们将介绍关于禁用子图问题的某些结果，并讨论与之有关的一些极值问题。必须强调，我们不打算全面地介绍极图理论。

在进行详细讨论之前，我们先对所用的术语加以适当说明。如果对一个给定的图类的某个图参数，比如说边数或最小度数，至多为某个数 f，则称使等号成立的图为该不等式的**极图**。一个平凡的例子是，一个 n 阶无圈图至多有 $n-1$ 条边，其极图是 n 阶树。在禁用子图问题中，如果一个图不包含 F 且有 $ex(n;F)$ 条边，则该图是**极图**。前一章中的 Tutte 的因子定理使我们能解答一个极好的**极值问题**：总共多少条边才能保证有 $k+1$ 条独立边？在这种情况中，F 由 $k+1$ 条独立边组成，即 $F=(k+1)K^2$。第Ⅱ章的练习31断言，对 $n\geqslant 2k+1$，$ex(n;F)$ 的极图是 $K^{2k+1}\cup E^{n-2k-1}$ 和/或 K^k+E^{n-k}。

这一章的材料分成两部分：奇数节是有关路和圈，偶数

节是有关完全子图的问题。象在其它大部分章那样，为了先提出较简单的结果，我们采用交替地讨论一些问题的方式。

第一节是关于级较大的图中的路和圈（短的和长的），其中，我们给出 $ex(n;P^l)$的一个很好的界，此处 $ex(n;P^l)$ 是没有长为 l 的路的 n 阶图的最多边数，我们也将介绍关于哈密顿圈的一些基本结果。

在图论中，最著名的定理之一是 Tura'n 定理，它确定了函数 $ex(n;K^r)$，第二节介绍这个定理及一些有关的结果。

当讨论 $ex(n;P^l)$ 和 $ex(n;K^r)$ 时，我们主要关心的是 n 比 l 和 r 大很多的情形。如果 F 和 G 有同样的阶，我们遇到的问题就不一样了，这些问题中的一个主要例子是哈密顿圈问题，我们将在第三节中讨论它。多年来为寻求这一问题的解答作了大量的工作，而目前得到的答案还只是在某种极其狭窄的意义下才是满意的。

第四节介绍了非常深刻的和令人惊奇的 Erdös 和 Stone 定理，即关于 $ex(n;F)$的定理，此处 F 是完全 r—部图，其每个类有 t 个顶点，而作为这一结果的直接推论，我们对每个图 F，可以确定 $\lim\limits_{n\to\infty} ex(n;F)/n^2$。

§1 路 和 圈

按这个问题的自然提法，我们的第一个定理是用最小度和围长，即最短圈的长，给出图的阶的一个下界，同样，这个结果也用阶和最小度来给出围长的一个上界。

定理 1. 对 $g\geqslant3$ 和 $\delta\geqslant3$，记

$$n_0(g,\delta)=\begin{cases}1+\dfrac{\delta}{\delta-2}\{(\delta-1)^{(g-1)/2}-1\} & \text{如果 } g \text{ 是奇数,}\\ \dfrac{2}{\delta-2}\{(\delta-1)^{g/2}-1\} & \text{如果 } g \text{ 是偶数,}\end{cases}$$

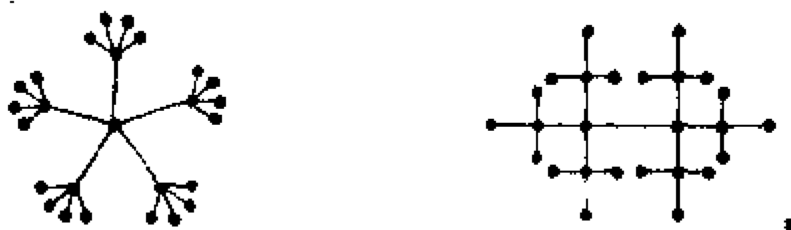
则一个具有最小度 δ 和围长 g 的图至少有 $n_0(g,\delta)$ 个顶点。

证明：首先，假设 g 是奇数，比如说 $g=2d+1,d\geqslant 1$。取一个顶点 x。不存在这样的顶点 z，使 G 包含长至多为 d 的两条不同的 z—x 路，因为不然的话，G 有长至多为 $2d$ 的圈。因此，至少存在 δ 个与 x 的距离为 1 的顶点，至少 $\delta(\delta-1)$ 个与 x 的距离为 2 的顶点，等等，至少 $\delta(\delta-1)^{d-1}$ 个与 x 的距离为 d 的顶点（图Ⅳ.1）。这样

$$n\geqslant 1+\delta+\delta(\delta-1)+\cdots+\delta(\delta-1)^{d-1},$$

这正是所要求的。

现在，假设 g 是偶数，比如说 $g=2d$。取两个邻接顶点 x 和 y，则存在 $2(\delta-1)$ 个与 $\{x,y\}$ 的距离为 1 的顶点，$2(\delta-1)^2$ 个与 $\{x,y\}$ 的距离为 2 的顶点，等等，$2(\delta-1)^{d-1}$ 个与 $\{x,y\}$ 的距离为 $d-1$ 的顶点，这蕴含了要求的不等式。□



图Ⅳ.1. 情形 $\delta=g=5$ 和 $\delta=4$，$g=6$。

令 G_0 是定理 1 的极图，即具有参数 δ 和 g 且使等号成立的图。上面的证明蕴含：G_0 是 δ 度正则的，如果 $g=2d+1$，则 G_0 有直径 d，如果 $g=2d$，则每个顶点与每对邻接顶点的距离不超过 $d-1$。显而易见，$n_0(g,\delta)$ 也是存在具

有上述后一个性质且具有最大度δ的图的最大阶数(练习1)。我们称G_0为**具有δ度和围长g的Moore图**,或当$g=2d+1$时,G_0是**度为δ和直径为d的Moore图**,在第Ⅷ章中,我们将用代数方法来研究Moore图。

现在来看看我们对于图中的长圈和路能说些什么。如果一个n阶图是哈密顿图,则它的**周长**,即最长圈的长是n,而最长路的长是$n-1$,但是,每个非哈密顿连通图包含至少象图的周长那样长的路。事实上,如果$C=x_1x_2\cdots x_l$是最长的圈和$l<n$,则存在一个这样的顶点y,y不在C上,但y与C的一个顶点(设它为x_1)邻接,于是$yx_1x_2\cdots x_l$是一条长为l的路。

定理2. 令G是$n\geqslant 3$阶连通图,而且对其任意一对不邻接的顶点x和y有

$$d(x)+d(y)\geqslant k。$$

如果$k=n$,则G是哈密顿图;如果$k<n$,则G包含一条长为k的路和一个长至少为$(k+2)/2$的圈。

证明: 假设G不是哈密顿图,令$P=x_1x_2\cdots x_l$是G中一条最长的路。P的最大性蕴含x_1和x_l的邻接顶点都是P的顶点。因为G不包含长为l的圈,x_1不邻接于x_l。并且,路P不能包含这样的顶点x_i和x_{i+1},使x_1邻接x_{i+1},而x_l邻接x_i,因为否则的话,$x_1x_2\cdots x_ix_lx_{l-1}\cdots x_{i+1}$是长为$l$的圈(图Ⅳ.2)。因此,集

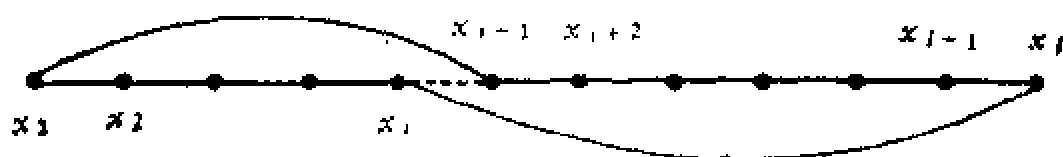
$$\Gamma(x_1)=\{x_j:x_1x_j\in E(G)\}\text{ 和}$$

$$\Gamma(x_l)=\{x_{i+1}:x_ix_l\in E(G)\}$$

是$\{x_2, x_3, \cdots, x_l\}$的两个不相交的子集，故

$$k \leqslant d(x_1) + d(x_l) \leqslant l - 1 \leqslant n - 1。$$

由这个不等式即可得定理的前两个断言。如果 $k = n$，此不等式是不能成立的，故 G 是哈密顿图。如果 $k < n$，则 P 的长 $l - 1 \geqslant k$。



图Ⅳ.2. 长为l的圈的构造。

最后，关于圈的断言甚至更为简单。假设 $d(x_1) \geqslant d(x_l)$，则 $d(x_1) \geqslant \lceil k/2 \rceil$，此处$\lceil z \rceil$表示不小于 z 的最小整数。记 $t = \max\{i; x_i x_1 \in E(G)\}$，则 $t \geqslant d(x_1) + 1 \geqslant \lceil k/2 \rceil + 1$，而 G 包含长为 t 的圈 $x_1 x_2 \cdots\cdots x_t$。 □

在§3中，我们将使用此定理的证明来获得关于没有长圈和长路的图的详细信息，暂时我们仅给出定理2的两个推论。

定理3. 令 G 是一个没有长为 $k(\geqslant 1)$的路的 n 阶图，则

$$e(G) \leqslant \frac{k-1}{2} n。$$

一个图是其极图（即它使等号成立）当且仅当它的所有分支都是 k 阶完全图。

证明： 我们固定 k，并且应用对 n 的归纳法。如果 $n \leqslant k$，断言显然成立。现在假设$n > k$而且对较小的 n 值断言成立。

如果 G 是不连通的，归纳假设蕴含所要求的结果。现在，若 G 是连通的，则它不包含 K^k，而且根据定理1，它

有一个至多为$(k-1)/2$度的顶点x。因为$G-x$不是极图，则

$$e(G)\leqslant d(x)+e(G-x)<$$

$$\frac{k-1}{2}+\frac{k-1}{2}(n-1)=\frac{k-1}{2}n。$$

□

定理 4. 令G是一个n阶图，并且其中每个圈的长至多为$k(k\geqslant 2)$，则

$$e(G)\leqslant\frac{k}{2}(n-1)。$$

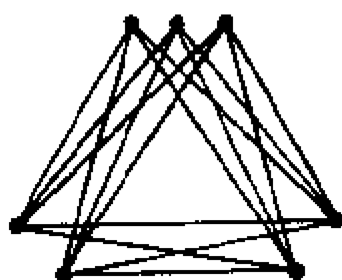
一个图为其极图当且仅当它是连通的并且它的所有块都是k阶完全图。 □

这个定理的证明比定理3的证明复杂一些，因为它的比较方便的证法要用到§3中引入的“简单变换”，这个定理的证明留作练习（练习25），其中有详细的提示。

§2 完全子图

在不包含r阶完全子图K^r的n阶图中，边的最大数目$ex(n;K^r)$是多少？如果G是$(r-1)$—部图，则它不包含K^r，这是因为G的每个顶点类至多包含完全子图的一个顶点，这样，$ex(n;K^r)$至少等于n阶$(r-1)$—部图的最大级。事实上，存在唯一的具有最大级的n阶$(r-1)$—部图，这个图是完全$(r-1)$—部图$T_{r-1}(n)$，在其第k类中有$\lfloor(n+k-1)/(r-1)\rfloor$个顶点(图Ⅳ.3)，换言之，$T_{r-1}(n)$是其各类中顶点数尽可能相等的$n$阶完全$(r-1)$—部图：在其第$k$类中有$n_k$个顶点，而$n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_{r-1}\leqslant n_1+1$。事实上，令$G$是

具有最大级的 n 阶 $(r-1)$—部图，显然，G 是完全 $(r-1)$—部图。假设其各类不是尽可能相等的，比如说第一类有 m_1 个顶点，第二类有 $m_2 \geqslant m_1+2$ 个顶点，这是不可能的，因为用把第二类的一个顶点转移到第一类的方法，我们可以把边数增加 $(m_1+1)(m_2-1)-m_1m_2=m_2-m_1-1\geqslant 1$.



图Ⅳ3. Turan图。

$T_{r-1}(n)$ 中的边数通常记作 $t_{r-1}(n)$，这样，$t_2(n)=[n^2/4]$。Tura'n 的基本定理表明，平凡的不等式 $ex(n;K^r)\geqslant t_{r-1}(n)$，实际上对每个 n 和 r 是等式。我们首先来证明，一个没有 K^r 的图的度序列是被一个 $(r-1)$—部图的度序列所控制+。由上面所作的说明看出，这蕴含 Turán 定理。

定理 5. 令 G 是具有顶点集 V 但不包含 r 阶完全图 K^r 的图，存在一个 $(r-1)$—部图 H，使其顶点集为 V，而且对每个顶点 $z\in V$ 有

$$d_G(z)\leqslant d_H(z)。$$

如果 G 不是一个完全 $(r-1)$—部图，则至少存在一个顶点 z，对 z 来说上面的不等式是严格的。

证明： 我们将应用对 r 的归纳法。对 $r=2$ 不需证明什么，因为 G 是空图 E^n，它是 1—部图。现在假设 $r\geqslant 3$ 和对较小的 r 值断言成立。

+序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 称为被序列 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所控制，若 $a_i\leqslant b_i$，$i=1, 2, \cdots, n$。——校注。

取一个顶点 $x\in V$，使 $d_G(x)$ 最大，并用 W 表示 G 的与 x 邻接的顶点集，则 $G_0=G[W]$ 不包含 K^{r-1}，因为否则的话，添加 x 后将形成一个 K^r。依归纳假设，我们可以用 $(r-2)$—部图 H_0 来代替 G_0。H_0 有顶点集 W，并使对每个 $y\in W$ 有 $d_{G_0}(y)\leqslant d_{H_0}(y)$。把 $V-W$ 中的顶点添加到 H_0 中，并把 $V-W$ 中的每个顶点与 W 中的每个顶点联结起来。为完成证明，我们来检查，用这种方法得到的 H 具有所要求的性质。

如果 $z\in V-W$，则 $d_H(z)=d_H(x)=d_G(x)\geqslant d_G(z)$；如果 $z\in W$，则 $d_H(z)=d_{H_0}(z)+n-|W|\geqslant d_{G_0}(z)+n-|W|\geqslant d_G(z)$。这样，对每个 $z\in V$，有 $d_G(z)\leqslant d_H(z)$。

H 能包含 r 阶完全子图吗？显然不能，因为 H 的一个完全子图在 $V-W$ 中至多有一个顶点，在 W 中至多有 $r-2$ 个顶点。

对于 $e(G)=e(H)$ 的 G，我们能说些什么呢？此时 $e(G_0)=e(H_0)$，故依归纳假设，G_0 是一个完全 $(r-2)$—部子图，而

$$e_G(W,\overline{W})=e_H(W,\overline{W})=|W|\,|\overline{W}|。$$

因此

$$e(G[\overline{W}])=e(H[\overline{W}])=0,$$

这蕴含 G 是完全 $(r-1)$—部图。 □

现在，我们给出 Tura'n 定理原来的形式。

定理 6. $ex(n;K^r)=t_{r-1}(n)$，而 $T_{r-1}(n)$ 是唯一的不包含 r 阶完全子图的 n 阶和 $t_{r-1}(n)$ 级的图。

第一种证明： 因为 $T_{r-1}(n)$ 是唯一的 n 阶的和级最大的

$(r-1)$一部图，由定理 5 就得到所要求的两个断言。 □

为了强调定理 6 的重要性，我们也从基本的原理出发来证明这个定理。这个证明是基于下述事实，$T_{r-1}(n)$ 几乎是正则的：即 $\delta(T_{r-1}(n)) = n - \lceil n/(r-1) \rceil$，$\Delta(T_{r-1}(n)) = n - \lfloor n/(r-1) \rfloor$，而如果 x 是 $T_{r-1}(n)$ 中的一个度最小的顶点，则 $T_{r-1}(n) - x$ 恰为 $T_{r-1}(n-1)$。

第二种证明：因为 $r \geqslant 3$ 并对 n 应用归纳法。对于 $n \leqslant r$，断言是平凡的，故假设 $n > r$，且对 n 的较小值定理成立。

假设 G 有 n 个顶点，$t_{r-1}(n)$ 条边，而且它不包含 K^r。因为 $T_{r-1}(n)$是不包含 K^r 的极大图(即不能添加一条边到它之中而不产生 K^r)，如果我们能证明 G 恰好为 $T_{r-1}(n)$，归纳步骤就完成了。因为在 $T_{r-1}(n)$中任意两个顶点的度至多差1，有

$$\delta(G) \leqslant \delta(T_{r-1}(n)) \leqslant \Delta(T_{r-1}(n)) \leqslant \Delta(G)。$$

令 x 是 G 的一个顶点，而且 $d(x) = \delta(G) \leqslant \delta(T_{r-1}(n))$。则有

$$e(G-x) = e(G) - d(x) \geqslant e(T_{r-1}(n-1)),$$

故依归纳假设，$G_x = G - x$ 恰为 $T_{r-1}(n)$。

G_x 的一个最小的顶点类包含$\lfloor (n-1)/(r-1) \rfloor$ 个顶点，而顶点 x 除了

$$n - 1 - \left(n - \left\lceil \frac{n}{r-1} \right\rceil\right) = \left\lfloor \frac{n-1}{r-1} \right\rfloor$$

个顶点之外与 G_x 的其它所有顶点联结。因为 x 不能联结于 G_x 的每个类中的一个顶点，它必须联结于除在一个最小的顶点类中的顶点之外的 G_x 的所有顶点。这证明了 G 恰为图

$T_{r-1}(n)$。 □

很容易就可以把上面的证明改写一下，以给出一些有关的结果（参看练习 7,8）。

现在我们转向 Zarankiewicz 问题，它和关于二部图的 Tura'n 问题类似。把第一类中有 m 个顶点而第二类中有 n 个顶点的二部图记作 $G_2(m,n)$。如果 $G_2(m,n)$ 不包含其第一类有 s 个顶点而第二类有 t 个顶点的完全二部图，$G_2(m,n)$ 的最大级等于多少？这个最大值通常记作 $z(m,n;s,t)$，下面的简单引理似乎蕴含函数 $z(m,n;s,t)$ 的一个非常好的上界。

引理 7. 令 m，n，s，t，r，k 都是整数，$2\leqslant s\leqslant m$，$2\leqslant t\leqslant n$，$0\leqslant k, 0\leqslant r<m$，且令 $G=G_2(m,n)$ 是级为 $z=my=km+r$ 的一个图，并且它不包含第一类有 s 个顶点而第二类有 t 个顶点的子图 $K(s,t)$，则

$$m\binom{y}{t}\leqslant(m-r)\binom{k}{t}+r\binom{k+1}{t}\leqslant(s-1)\binom{n}{t}。\quad(1)$$

证明： 用 V_1 和 V_2 表示 G 的顶点类。如果顶点 $x\in V_1$ 联结 V_2 的一个 t—集 T（即有 t 个元素的集）的每个顶点，则说 T 属于 x。属于顶点 x 的 t—集的数目为 $\binom{d(x)}{t}$。因为对 G 的假设就是说 V_2 中的每个 t—集至多属于 V_1 的 $s-1$ 个顶点，我们求得

$$\sum_{x\in V_1}\binom{d(x)}{t}\leqslant(s-1)\binom{n}{t}。\quad(2)$$

因为 $\sum_{x\in V_1}d(x)=z=my=km+r$，$0\leqslant r<m$，而对于 $u\geqslant t$，

$f(u)=\binom{u}{t}$是 u 的凸函数，不等式(2)蕴含(1)。 □

定理 8. $z(m,n;s,t)\leqslant(s-1)^{1/t}(n-t+1)m^{1-(1/t)}+(t-1)m$。

证明： 令 $G=G_2(m,n)$ 是对函数 $z(m,n;\ s,\ t)$ 的一个极图，即令 G 是具有级 $z(m,n;s,t)$ 且不包含 $K(s,t)=my$ 子图的二部图。因为 $y\leqslant n$，不等式(1)蕴含

$$(y-(t-1))^t\leqslant(s-1)(n-(t-1))^t m^{-1}。$$ □

作为定理 8 的一个推论，我们看到，如果 $t\geqslant2$ 和 $c>(t-1)^{1/t}$ 都固定，则对每个充分大的 n 有

$$z(n,n;t,t)<cn^{2-(1/t)}。\tag{3}$$

引理 7 的方法也给出 $ex(n;K_2(t))$ 的一个上界，$ex(n;K_2(t))$是不包含完全 t—t 二部子图的 n 阶图的边的最大数目。

定理 9. $ex(n;K_2(t))\leqslant\frac{1}{2}(t-1)^{1/t}(n-t+1)n^{1-(1/t)}$

$$+\frac{1}{2}(t-1)n$$

$$<\frac{1}{2}(t-1)^{1/t}n^{2-(1/t)}+\frac{1}{2}tn。$$

证明： 令 G 是一个极图。象在引理 7 中那样，如果一个顶点 x 连接于一个 t—集的每个顶点，就说这个 t—集属于顶点 x。因为 G 不包含 $K_2(t)$，每个 t—集至多属于 $t-1$

个顶点。因此，如果 G 有度序列 $(d_i)_1^n$，则 $\sum_{i=1}^n d_i = 2e \geqslant (n;$

$K_2(t))$ 和 $\sum_{i=1}^n \binom{d_i}{t} \leqslant (t-1)\binom{n}{t}$，这蕴含定理的结果。□

很可能，当 $n\to\infty$ 时，对每个 $t\geqslant 2$，不等式 (3) 给出了 $z(n,n;\ t,t)$ 的大小正确的阶，但仅对 $t=2$ 和 3 证明了这个结果。事实上，对 $z(m,n;\ s,t)$ 寻求一个非平凡的下界是相当困难的。在第Ⅶ章中将使用概率的方法来获得一个下界。为了结束这一节，对 $t=2$ 我们来证明一个很好的结果，它表明了 Zarankiewicz 问题与设计，特别是射影空间之间的联系。

定理 10. $z(n,n;\ 2,2) \leqslant \frac{1}{2}n\{1+(4n-3)^{1/2}\}$，且对无穷多个 n 的值，等号成立。

证明： 注意，对于 $z=\frac{1}{2}n\{1+(4n-3)^{1/2}\}$，有

$$(z-n)z=n^2(n-1)。$$

假设存在二部图 $G=G_2(n,n)$，它的级大于 z，而且它不包含四边形（即 $K(2,2)$）。用 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 表示 G 的第一个顶点类 V_1 的各顶点的度，则有 $\sum_{i=1}^n d_i = e = e(G) > z$，而象在引理 7 的证明中那样，有

$$\binom{n}{2} \geqslant \sum_{1}^{n} \binom{d_i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n} d_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{1}^{n} d_i$$

$$\geqslant \frac{1}{2n} e^2 - \frac{e}{2} > \frac{z(z-n)}{2n} = \binom{n}{2}。$$

这表明定理中的不等式的确成立。

实际上，到目前为止的证明告诉了我们很多关于可以达到等号的图 G 的信息。我们必有 $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = d$ 且在 G 的第二个顶点类 V_2 中任意两个顶点恰有一个公共的邻接顶点。依对称性，V_2 的每个顶点有度 d，而且 V_1 的任意两个顶点恰有一个公共邻接顶点。

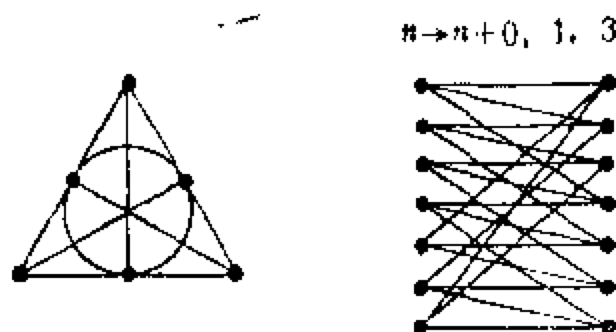
称 V_2 中的顶点为**点**，对 $x \in V_2$ 称 $\Gamma(x)$ 为**线**。根据上面的说明，存在 n 个点和 n 条线，每个点在 d 条线上，而每条线包含 d 个点，通过任意两点恰好存在一条线，而任意两条线恰好相交一点。这样，得到了 $d-1$ **阶射影平面**。因为易于将这些步骤倒推回去，我们看到，如果存在有 n 个顶点的射影平面，则对这个 n 等号成立。特别是，对每个 $n = q^2 + q + 1$ 等号成立，此处 q 是素数幂。

最后，对上面的 n 值我们来观察 G 的实际结构。令 q 是素数幂而 $PG(2, q)$ 是在 q 阶域上的射影平面。令 V_1 是点集而 V_2 是线集。则

$$|V_1| = |V_2| = q^2 + q + 1 = n。$$

令 G 是有顶点类 V_1 和 V_2 的二部图 $G_2(n, n)$，在其中 $Pl(P \in V_1, l \in V_2)$ 是一条边当且仅当点 P 在线 l 上（见图Ⅳ.4），则 G 有 $n(q+1) = \frac{1}{2} n\{1 + (4n-3)^{1/2}\}$ 条边，而且它

不包含四边形。 □



图Ⅳ4. $PG(2,2)$ 和对应的二部图。

§3 哈密顿路和圈

一个图类称为是**单调的**，如果由图 L 属于该图类可知在 L 中添加一条边（但不添加顶点）得到的图 M 也属于该类。在图论中的大多数定理可用单调类 **M** 包含在单调类 **P** 中的这种说法来表示，当然，这些类通常用图不变量或者它们所包含的子图来描述。例如，在上节中叙述的 Turán 定理的最简单的情形说，类 $\mathbf{M}=\{G(n,m):m>n^2/4\}$ 包含在类 $\mathbf{P}=\{G: G$ 包含 $K^3\}$ 中。值得指出，如果 $L\in\mathbf{P}$ 和 $L\cong M$ 蕴含 $M\in\mathbf{P}$，就说图的一个类 **P** 是图的一个**性质**。

我们怎样判断 **M** 是否包含在 **P** 中呢？对某些情形，存在解决这一问题的简单而有效的方法。假设有三元组 (G,x,y) 的类 **T**，此处 G 是图，而 x 和 y 是 G 中的两个不邻接的顶点，而且如果 $(G,x,y)\in\mathbf{T}$ 和 $G\in\mathbf{M}$，则 G 属于 **P** 当且仅当 $G^+ +xy$ 属于 **P**。例如，如果 **P** 是"包含 K^r"这个性质，而 $\mathbf{T}=\{(G,x,y):|\Gamma(x)\cap\Gamma(y)|<r-2\}$，则上述条件成立，对这种情形，$G$ 可以被 G^+ 代替。如果 G^+ 也包含两个不邻接的顶点 u 和 v，使 $(G^+,u,v)\in\mathbf{T}$，则我们可以重复这种运算，

即可用 $G^{++}=G^{+}+uv$ 代替 G^{+}。继续这一过程，得到图 $G^*\supseteq G$，它属于 P 当且仅当 G 属于 P，它是 G **的关于 T 的闭包**，即它有附加性质：没有顶点 $a,b\in G^*$，使 $(G^*,a,b)\in$ T 成立。这样，只要对这些图 $G^*\in$ M，判断是否属于 P 即可。

当然，上述方法可行仅当下列条件满足：(i) 类 T 足够简单，(ii) 证明 $G\in$ P 当且仅当 $G^{+}\in$ P 比较容易和 (iii) 如果我们从一个图 $G\in$ M 开始，然后证明图 $G^*\in$ M 是否属于 P 也比较容易。在这一节中，我们给出两个例子，它们满足所有这些条件：我们将对于包含哈密顿圈的图和包含哈密顿路的图给出充分条件。由于这些例子的特殊特征，使用稍微不同的记号和术语是方便的。

令 n 和 k 是自然数，P 是 n 阶图的一个类。设 G 是任意的一个 n 阶图，x 和 y 是 G 的两个不邻接的顶点，而且 $d(x)+d(y)\geqslant k$。如果 G 有性质 P 当且仅当 $G^{+}=G+xy$ 也有性质 P，则说性质 P 是 k 稳定的。显而易见，对每个 n 阶图 G，存在包含 G 的且具有下列性质的唯一的极小图 $G^*=C_k(G)$：如果 $xy\notin E(G^*)$，则

$$d_{G^*}(x)+d_{G^*}(y)\leqslant k-1。$$

用前一段的记号，我们将取

$$\mathsf{T}=\{(G,x,y):|G|=n,xy\notin E(G),d(x)+d(y)\geqslant k\},$$

这确实非常简单，故 (i) 满足。也令人鼓舞的是 $G^*=C_k(G)$ 是唯一的。我们几乎只要用定义就可得下述的**稳定性原理**：如果 P 是 n 阶图的一个 k—稳定性质，则 G 有性质 P 当且仅当 $C_k(G)$ 也有性质 P。我们称 $C_k(G)$ 为 G 的 **k—闭包**。

要求(ii)也满足，因为定理 2 证明的要点是：包含哈密顿圈这个性质是 n—稳定的，而包含哈密顿路这个性质是 $(n-1)$—稳定的。事实上，如果对任意两个不同的不邻接顶点 x 和 y，$d(x)+d(y)\geq n-1$，则图是连通的，故定理 2 的证明适用于这种情形（事实上，这个证明就是 k—闭包概念产生的起因）。依稳定性原理，我们得到了定理 2 在 $k=n$ 或 $n-1$ 的情形的下述新提法。

引理 11. G 是哈密顿图当且仅当 $C_n(G)$ 是哈密顿图；G 有哈密顿圈当且仅当 $C_n(G)$ 有哈密顿圈†。 □

根据我们在这一段能够并乐于付出的努力的大小（参看要求(iii)），我们对一个图成为哈密顿图可获得几种不同的充分条件。当然，定理 2 的 $k=n$ 的情形不用做任何工作就可得到；情形 $k=n-1$ 也是如此，因为在第一种情形下条件直接蕴含 $C_n(G)=K^n$，第二种情形蕴含 $C_{n-1}(G)=K^n$，而如果 $n\geq 3$，则 K^n 是哈密顿图。为了更好地利用引理 11，我们来证明下面的冗长的技术性的引理。

引理 12. 令 k,n 和 t 都是自然数，$t<n$，令 G 是有顶点集 $V(G)=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的一个图，而且其 k—闭包 $C_k(G)$ 至多包含 $t-1$ 个 $n-1$ 度的顶点，则存在这样的下标 $i, j(1\leq i<j\leq n)$，使 $x_ix_j\notin E(G)$，且下列四个不等式都成立：

---

†这一引理的两句话说的是同一回事。依前文，后一句话似应为：G 有哈密顿路当且仅当 $C_{n-1}(G)$ 有哈密顿路。——校注。

$$j \geqslant \max\{2n-k-i,\ n-t+1\},$$
$$d(x_i) \leqslant i+k-n, d(x_j) \leqslant j+k-n-1, \qquad (4)$$
$$d(x_i)+d(x_j) \leqslant k-1。$$

注。注意我们并不假定 G 的度序列 $d(x_1), d(x_2), \cdots, d(x_n)$ 已用任何方式排成次序。

证明：图 $H=C_k(G)$ 不是完全的，故我们可以定义两个下标 i 和 j 如下：

$$j=\max\{l: d_H(x_l) \neq n-1\},$$
$$i=\max\{l: x_l x_j \notin E(H)\}。$$

则 $x_i x_j \notin E(H)$，故根据(3)有

$$d_H(x_i)+d_H(x_j) \leqslant k-1,$$

这蕴含(4)中的第四个不等式。顶点

$$x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_n$$

中的每一个在 H 中的度都是 $n-1$，故

$$n-j \leqslant t-1$$

且

$$n-j \leqslant \delta(H) \leqslant d_H(x_i)。$$

顶点 x_j 联结于它后面的 $n-j$ 个顶点并联结于它前面的 $j-i-1$ 个顶点，故

$$d_H(x_j) \geqslant n-j+j-i-1=n-i-1。$$

这些不等式能使我们证明下标 $i, j(1 \leqslant i<j<n)$ 满足 (4) 中剩下的三个不等式。事实上，

$$d_G(x_i) \leqslant d_H(x_i) \leqslant k-1-d_H(x_j)$$
$$\leqslant k-1-(n-i-1)=i+k-n,$$
$$d_G(x_j) \leqslant d_H(x_j) \leqslant k-1-d_H(x_i)$$

$$\leqslant k-1-(n-j)=j+k-n-1,$$

$$i+j\geqslant(n-d_H(x_j)-1)+(n-d_H(x_i))$$

$$\geqslant 2n-1-(k-1)=2n-k。$$

□

综合引理 11 和引理 12（关于 $i=n-1$ 和 $k=n$ 或 $n-1$），对于哈密顿路或圈的存在性，我们得到一个颇为复杂但很有用的条件。

定理 13. 令 G 是有顶点集 $V(G)=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的一个图，$n\geqslant 3$。令 $\varepsilon=0$ 或 1，并假设不存在这样的下标 i，$j(1\leqslant i<j\leqslant n)$，使 $x_ix_j\notin E(G)$ 和 $j\geqslant n-i+\varepsilon$，

$$d(x_i)\leqslant i-\varepsilon, d(x_j)\leqslant j-1-\varepsilon,$$

$$d(x_i)+d(x_j)\leqslant n-1-\varepsilon。$$

如果 $\varepsilon=0$，则 G 有哈密顿圈；如果 $\varepsilon=1$，则 G 有哈密顿路。

□

这个定理有下列精彩的推论。

推论 14. 令 G 是有度序列 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_n(n\geqslant 3)$ 的一个图，且令 $\varepsilon=0$ 或 1，假设当 $d_k\leqslant k-\varepsilon<\frac{1}{2}(n-\varepsilon)$ 时就有

$$d_{n-k-\varepsilon}\geqslant n-k。$$

如果 $\varepsilon=0$，则 G 有哈密顿圈，如果 $\varepsilon=1$，则 G 有哈密顿路。

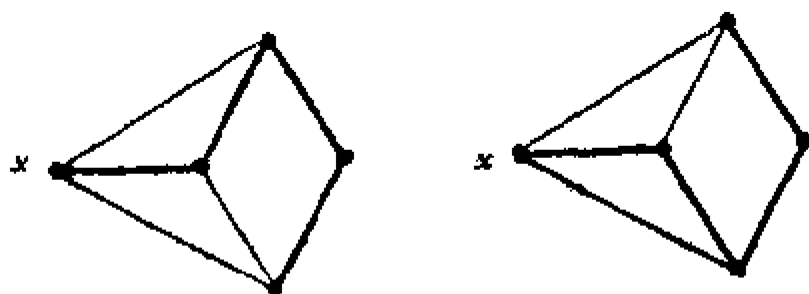
□

请读者注意练习 21 和练习 22，它们表明，在上面推论

中的断言在某种意义下是最好的，特别是，如果 $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n$ 是这样的可图序列，使

$$d_{n-k} < n-k \text{ 和 } d_k \leqslant k < \frac{n}{2},$$

则存在图 G，其顶点集为 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，满足 $d(x_i) \geqslant d_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$，而且 G 没有哈密顿圈。



图Ⅳ.5．一条 x—路和它的一个简单变换。

要证明一个图有哈密顿路或圈，还有另一个惯用的方法。令 S 是 G 中一条最长的 x_0—路，即始于 x_0 的最长的路：$S = x_0 x_1 \cdots x_k$。则 $\Gamma(x_k) \subset \{x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}\}$，因为否则的话，$S$ 将能延长而得到更长的路。如果 x_k 邻接于 $x_j (1 \leqslant j \leqslant k-1)$，则 $S' = x_0 x_1 \cdots x_j x_k x_{k-1} \cdots x_{j+1}$ 是另一条最长的 x_0—路，我们称 S' 是 S 的一个**简单变换**，它是在 S 中去掉边 $x_j x_{j+1}$ 并添加边 $x_k x_j$ 所得到的。注意，如果 S' 是 S 的简单变换，则 S 也是 S' 的简单变换，而 S 恰有 $d(x_k) - 1$ 个简单变换。连续施行一列简单变换的结果称为一个**变换**（见图Ⅳ.5）。

令 L 是 S 的各个变换的端点（与 x_0 不同的）集，并记 $N = \{x_i \in S : x_{i-1} \in L \text{ 或 } x_{i+1} \in L\}$ 和 $R = V - N \cup L$。这样，L 是各变换的最后一个顶点的集，N 是它们在 S 上的邻接顶点的集，而 R 是其余顶点的集。

定理 15. 图 G 没有 L—R 边。

证明： 回忆一下，因为 S 是最长的 x_0—路，所以不存在 L—$(V(G)-V(S))$ 边，特别是，对 S 的每个变换 P，有 $V(S)=V(P)$。

假设 $x_ix_j \subset E(G)$，此处 $x_i \in L$，$x_j \in R$。令 S_i 是 S 的在 x_i 终止的一个变换。因为在 S_i 上 x_j 有一个邻接顶点是 S_i 的一个简单变换的端点，故 x_j 在 S 和 S_i 上不能有同样的邻接顶点，因为否则的话，x_j 将属于 N。但是，如果边 $x_jx_{j'}$（$j'=j-1$ 或 $j+1$）是简单变换序列 $S \to S' \to S'' \to \cdots \to S_i$ 中间消失的边，则两个顶点 $x_{j'}$ 和 x_j 中必有一个在 L 中，从而另一个在 N 中。这样，$x_j \in L \cup N = V(G)-R$，这与我们的假设矛盾。 □

在后面第Ⅶ章中，我们将用到定理 15。这一节的最后两个结果也是利用简单变换得到的。

定理 16. 令 W 是图 G 中度为偶数的顶点的集，x_0 是 G 的一个顶点，则存在偶数条终止于 W 中的最长的 x_0—路。

证明： 令 H 是一个这样的图，其顶点集 Σ 是 G 中的最长的 x_0—路的集，在其中 $P_1 \in \Sigma$ 联结于 $P_2 \in \Sigma$ 当且仅当 P_2 是 P_1 的一个简单变换。因为在 H 中 $P=x_0x_1\cdots x_k \in \Sigma$ 的度是 $d(x_k)-1$，终止于 W 中的最长路的集就是 H 中的度为奇数的顶点的集。在任意图中度为奇数的顶点数为偶数，故证明完成了。 □

定理 17. 令 G 是所有顶点的度都为奇数的图，则 G 的每条边都包含在偶数个哈密顿圈中。

证明： 令 $x_0y\in E(G)$，则在 $G'=G-x_0y$ 中，仅 x_0 和 y 的度为偶数，故在 G' 中存在偶数条终止于 y 的最长的 x_0—路。这样，或 G 没有包含 x_0y 的哈密顿圈，或 G 有正偶数个哈密顿圈包含 x_0y。

□

§4 图的构造

正象我们在 §2 中看到的关于 Tura'n 图 $T_{r-1}(n)$ 的例子那样，具有 $\frac{1}{2}((r-2)/(r-1)+0(1))n$ 条边的 n 阶图未必包含 r 阶完全图 K^r。(我们在这里和后面使用Landau 记号0(1)表示当 $n\longrightarrow\infty$ 时，趋于 0 的函数。）这节的主要目的是证明 Erdös 和 stone 的深刻的结果，它是在 1946 年被证明的，此结果可简述如下，如果 $\varepsilon>0$，则再加上 εn^2 条边就不仅保证有 K^r，而且保证有 $K_r(t)$，$K_r(t)$ 是每个类都有 t 个顶点的 r —部图，此处，当 $n\to\infty$ 时 $t\to\infty$。

这个定理的一个更强的说法属于 Bolloba's 和 Erdös；这就是我们将在这里介绍的结果，其简单的证明基于两个引理，第一个引理能使我们用对最小度的条件来代替对级的条件，第二个引理是引理 7 的系列中的技巧性引理。

引理 18. 令 $0<a<a+\varepsilon<1$，并记 $\eta=\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/2}$，则每个

$n\geqslant 2a/\varepsilon$ 阶和级至少为 $\frac{1}{2}(a+\varepsilon)n^2$的图 G 包含子图 H，使 $|H|=h\geqslant \eta n$，而且其最小度至少为 ah。

证明： 定义一个图序列 $G_0=G\supset G_1\supset G_2\supset\cdots$，其中 $|G_k|=n-k$；如果 G_k 有度小于 $a(n-k)$ 的顶点 x_k，则记 $G_{k+1}=G_k-x_k$；如果 $\delta(G_k)\geqslant a(n-k)$，则终止这个序列。如果我们能证明该序列必终止于满足 $h=n-k\geqslant \eta n$ 的图 G_k，定理的断言就被证明了。

假设不是这样。我们得到具有 $h=n-k<\eta n$ 的图 G_k。依构造有

$$e(G_k)\geqslant \frac{1}{2}(a+\varepsilon)n^2-a\{n+(n-1)+\cdots+(h+1)\}。$$

另一方面，

$$e(G_k)\leqslant e(K^h)=\binom{h}{2},$$

故

$$\varepsilon n^2-an+ah+h\leqslant (1-a)h^2,$$

这与我们的假设矛盾。 □

引理 19. 令 $r\geqslant 2$，$1\leqslant t\leqslant q$ 和 $N=n-(r-1)q\geqslant 1$。令 G 是这样的一个 n 阶图，它包含 $K_{r-1}(q)$，设为 $\tilde{K}$，但它不包含 $K_r(t)$。则 G 至多有

$$e=((r-2)q+t)N+2qN^{1-1/t}$$

条形如 xy 的边，此处 $x\in\tilde{K}$ 而 $y\in G-\tilde{K}$。

证明： 令 $S_1,S_2,\cdots S_{r-1}$ 是 $\tilde{K}$ 的顶点类，并记

$S=\bigcup_{j=1}^{r-1} S_j$。这样，$|S_j|=q$ 和 $|S|=(r-1)q$。令 $x_1, x_2\cdots$, x_N 是 $G-K$ 的顶点，并记 $A_i=\Gamma(x_i)\cap S, i=1,2,\cdots,N$。用这个记号，引理断言

$$\sum_{i=1}^{N}|A_i|\leqslant e_0$$

如果集 $W\subset S$ 在每个集 S_j 中恰有 t 个顶点，则称 W 为一个**蜈蚣集**。因为 G 不包含 $K_r(t)$，每个蜈蚣集包含在至多 $t-1$ 个 A_i 中。可以假设，对 $i\leqslant M$ 有 $|A_i|\geqslant(r-2)q+t$；对 $i>M$ 有 $|A_i|<(r-2)q+t$。对 $i\leqslant M$ 和 $j\leqslant r-1$ 记 $a_{ij}=|A_i\cap S_j|$。则 $a_{ij}\geqslant t$ 和 A_i 包含

$$\prod_{j=1}^{r-1}\binom{a_{ij}}{t}$$

个蜈蚣集。因为总共存在 $\binom{q}{t}^{r-1}$ 个蜈蚣集，并且它们中的每一个包含在至多 $t-1$ 个集 A_i 中，我们有

$$\sum_{i=1}^{M}\prod_{j=1}^{r-1}\binom{a_{ij}}{t}\leqslant(t-1)\binom{q}{t}^{r-1}。$$

由这个不等式和二项式系数的凸性，即可得到所要求的估计。事实上，记 $a_i=\sum_{j=1}^{r-1}a_{ij}-(r-2)q$，有

$$\prod_{j=1}^{r-1}\binom{a_{ij}}{t}\geqslant\binom{q}{t}^{r-2}\binom{a_i}{t},$$

故

$$\sum_{i=1}^{M}\binom{a_i}{t}\leqslant(t-1)\binom{q}{t}。$$

因为$\binom{x}{t}$是x的凸函数，记$a=\sum_{i=1}^{M}a_i/M$，最后的不等式蕴含

$$M\binom{a}{t}\leqslant(t-1)\binom{q}{t}。$$

这样一来，有

$$a\leqslant(t-1)^{1/t}qM^{-1/t}+t<2qM^{-1/t}+t$$

和

$$\sum_{i=1}^{M}|A_i|<2qM^{-1/t}+M((r-2)q+t)。$$

因为

$$\sum_{i=M+1}^{N}|A_i|\leqslant(N-M)((r-2)q+t),$$

所要的估计式成立。 □

定理 20. 令$r\geqslant2$是整数，且$0<\varepsilon<\frac{1}{2}(r-1)$，则存在$d=d(\varepsilon,r)>0$，对充分大的$n$和

$$m\geqslant\left\{\frac{1}{2}(r-2)/(r-1)+\varepsilon\right\}n^2,$$

每个n阶和m级的图都包含具有$t\geqslant\lfloor d\log n\rfloor$的图$K_r(t)$。

证明： 我们应用对r的归纳法。对$r=2$定理 9 蕴含：任何$d<-1/\log(2\varepsilon)$都可取作$d(\varepsilon,2)$。事实上，如果存在

不包含 $K_2(t)$ 的图 $G(n,m)$，此处 $m \geqslant \varepsilon n^2$ 和 $t = \lfloor d \log n \rfloor$，则依定理 9 有

$$\varepsilon n^2 \leqslant \frac{1}{2}(t-1)^{1/t} n^{2-1/t} + \frac{1}{2} t n,$$

即

$$2\varepsilon n^{1/t} \leqslant (t-1)^{1/t} + t n^{-(1-1/t)}。$$

但是，当 n 充分大时，此不等式不能成立。

现在假设 $r > 2$ 和对较小的 r 值结果成立。为了方便起见，我们把 $K_p(\lfloor x \rfloor)$ 记作 $K_p(x)$，并用 $G_\varepsilon(n)$ 表示阶为 n 和级至少为 $\left\{\frac{1}{2}(r-2)/(r-1)+\varepsilon\right\} n^2$ 的一个图。

$$\text{记 } \varepsilon_r = \frac{1}{2}\{(r-2)/(r-1)-(r-3)/(r-2)\}$$

$$= \{2(r-1)(r-2)\}^{-1} > 0$$

和 $e_r = d(\varepsilon_r, r-1) > 0$，则 e_r 仅依赖于 r，故依归纳假设，如果 n 很大，则每个 $G_\varepsilon(n)$ 包含 $K_{r-1}(e_r \log n) = K_{r-1}(q)$。我们将证明，$d = d(\varepsilon, r) = e_r(r-1)\varepsilon/4$ 是定理所取的数，即当 n 充分大时，每个 $G_\varepsilon(n)$ 包含 $K_r(d \log n) = K_r(t)$。

假设与这一断言相反，存在任意大的 n，对这样的 n，某个 $G_\varepsilon(n)$ 不包含 $K_r(d \log n) = K_r(t)$。给定任意 $h_0 \geqslant 1/\varepsilon$，令 $G = G_\varepsilon(n)$，$n \geqslant h_0/\eta$，它包含 $K_{r-1}(q)$，把它记作 $\bar{K}$，但 G 不包含 $K_r(t)$。因此依定理 9，在由 $\bar{K}$ 的一个顶点类中的 q 个顶点生成的一个子图中，至多存在 $\frac{1}{2}(t-1)q^{2-(1/t)} + \frac{1}{2}qt$ 条边，故在由 $\bar{K}$ 的整体生成的子图中，至多存在

$$A=\binom{r-1}{2}q^2+(r-1)\left\{\frac{1}{2}(t-1)q^{2-1/t}+\frac{1}{2}qt\right\}$$

条边。并且，依引理 19，至多有

$$B=((r-2)q+t)(n-(r-1)q)+2qn^{1-(1/t)}$$

条边联结 $\tilde{K}$ 与 $G-\tilde{K}$。最后，因为 $\delta(G)\geqslant\{(r-2)/(r-1)+\varepsilon\}n$，必有

$$2A+B\geqslant(r-1)q\delta(G)\geqslant\{(r-2)+\varepsilon(r-1)\}qn,$$

故

$$2qn^{1-(1/t)}+(r-1)q^2+tn\leqslant\varepsilon(r-1)qn。$$

而这是矛盾的，因为对大的 n 值，此不等式不成立。 □

注. 在某种意义下，定理 20 是最好的：对每个 ε 和 r，存在同 ε 一起趋向于 0 的常数 d_r^*，使定理中所描述的图不必包含具有 $t=\lfloor d_r^*\log n\rfloor$ 的图 $K_r(t)$。事实上，在第Ⅶ章的定理 3 中，我们将看到，如果 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ 和 $d_2^*>-2/\log(2\varepsilon)$，则对每个充分大的 n，存在不包含 $K_2(t)$ 的图 $G(n, m)$，此处 $m=\lfloor\varepsilon n^2\rfloor$ 而 $t=\lfloor d_2^*\log n\rfloor$。这个结果直接蕴含(参看第Ⅶ章练习 6) 着：如果 $r>2$ 和 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}(r-1)^{-2}$，则任何大于 $-2/\log(2(r-1)^2\varepsilon)$ 的值都可取作 d_r^*。

因为当 $n\to\infty$ 时，$d\log n\to\infty$，所以定理 20 有下列的推论。

推论 21. 令 $F=K_r(t)$，此处 $r\geqslant2$ 和 $t\geqslant1$，则不包含 $K_r(t)$ 的 n 阶图的最大级是

$$ex(n;F)=\frac{1}{2}\left\{\frac{r-2}{r-1}+o(1)\right\}n^2。$$ □

推论 22. 令 F_1, F_2, …, F_l 都是非空图，用 r 表示各 F_i 的色数的最小值，即令 r 是这样的一个最小值：对某个 t，至少一个 F_i 包含在 $F=K_r(t)$ 中，则不包含任何 F_i 的 n 阶图的最大级是

$$ex(n;F_1,F_2,\cdots,F_l)=\frac{1}{2}\left\{\frac{r-2}{r-1}+o(1)\right\}n^2。$$

证明： Tura'n图 $T_{r-1}(n)$不包含任何一个 F_i，故

$$ex(n;F_1,F_2,\cdots,F_l)\geqslant e(T_{r-1}(n))=t_{r-1}(n)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{r-2}{r-1}+o(1)\right\}n^2。$$

反之，因为对某个 j 和 t 有 $F_j\subset F=K_r(t)$，

$$ex(n;F_1,F_2,\cdots,F_l)\leqslant ex(n;F_j)\leqslant ex(n;F)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{r-2}{r-1}+o(1)\right\}n^2。$$

□

定理 20 是极图构造更详细的研究的基础，与推论 22 相比，这种研究给我们以更精确的结果。但是，这一理论超出了本书的范围。

n 阶图 G 的**密度**定义为 $e(G)/\binom{n}{2}$。无穷图 G 的**上密度**是 G 的任意大的有限子图密度的上确界。使人惊奇和引人注意的是，并不是 0 和 1 之间的每个数都能是某个无穷图的上密度，上密度的值域是可数集。

推论 23. 无穷图 G 的上密度是 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，…，或 0；这些值的每一个都是某个无穷图的上密度。

证明： 令 G_r 是其每个类中有无穷多个顶点的完全 r--部图。因为当 $t\to\infty$ 时，$K_r(t)$ 的密度趋于 $1-(1/r)$，故 G_r 的上密度是 $1-(1/r)$，这就证明了第二个断言。

现在令 α 是 G 的上密度并假设

$$\alpha>1-\frac{1}{r-1}\ (r\geqslant 2)。$$

存在这样的 $\varepsilon>0$，使 G 包含具有 $n_k\to\infty$ 且满足条件 $e(H_k)\geqslant\frac{1}{2}(1-(1/(r-1))+\varepsilon)n_k^2$ 的 n_k 阶图 H_k 的图。根据定理 19，每个 H_k 包含具有 $t_k\to\infty$ 的子图 $K_r(t_k)$；子图 $K_r(t_k)$ 表明 $\alpha\geqslant 1-(1/r)$。 □

〔练习〕

1. (i) 令 G 是一个 n 阶图，其最大度 $\Delta\geqslant 3$，直径为 d，$n_0(g,\delta)$ 如定理 1 中所定义，证明：$n\leqslant n_0(2d+1,\Delta)$，其中等式成立当且仅当 G 是 Δ—正则的和有围长 $2d+1$。

(ii) 令 G 是一个 n 阶图，其最大度 $\Delta\geqslant 3$，并假设其每个顶点与每对邻接顶点的距离不超过 $d-1$。证明：$n\leqslant n_0(2d,\Delta)$，等号成立当且仅当 G 是 Δ—正则的和有围长 $2d$。

2. 对于 $k=3$ 和 4，证明定理 4。

3. 证明：不含偶圈的 n 阶图的最多边数是$\left\lfloor \frac{3}{2}(n-1) \right\rfloor$。将此结果与不包含奇圈的最大级相比较。

4. 证明：具有 $2k$ 个端点的树包含 k 条联结不同端点的边不重的路。

5. 假设 x 不是割点且度为 $2k$，证明：存在包含 x 的 k 个边不重的圈。（参看练习 4。）

6⁻. 证明：具有 n 个顶点和最小度为$\lfloor (r-2)n/(r-1) \rfloor + 1$ 的图包含 K^r。

7. 令 G 有 $n \geqslant r+1$ 个顶点和 $t_{r-1}(n)+1$ 条边。

(i)证明：G 包含两个具有 $r-1$ 个公共顶点的子图 K^r。

(ii)证明：对每个 p，$r \leqslant p \leqslant n$，$G$ 有一个具有 p 个顶点和至少 $t_{r-1}(p)+1$ 条边的子图。

8. 证明：对 $n \geqslant 5$，每个具有$\lfloor n^2/4 \rfloor + 2$ 条边的 n 阶图包含两个恰有一个公共顶点的三角形。

9. 证明：如果具有 n 个顶点和$\lfloor n^2/4 \rfloor - l$ 条边的图包含一个三角形，则它至少包含$\lfloor n/4 \rfloor - l - 1$个三角形。[提示：令 $x_1x_2x_3$ 是一个三角形，而用 m 表示联结$\{x_1, x_2, x_3\}$与$V(G)-\{x_1, x_2, x_3\}$的边数。估计在 $G-\{x_1, x_2, x_3\}$中的三角形的数目和与 $x_1x_2x_3$ 有公共边的三角形的数目。]

10⁺. (i)证明：n 阶图的边可以被总数不超过$\lfloor n^2/4 \rfloor$ 的边和三角形所覆盖。

(ii)令 G 是具有顶点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的图，$n \geqslant 4$，证明：存在一个集 S，$|S| \leqslant \lfloor n^2/4 \rfloor$，$S$ 包含这样的非空子集 X_1，

$X_2,\cdots,X_n$，使当 $X_i\cap X_j\neq\phi$，x_ix_j 是 G 的一条边。

11⁻．令 $1\leqslant k<n$，证明：每个阶为 n 而级为 $(k-1)n-\binom{k}{2}+1$ 的图包含一个最小度为 k 的子图，但存在一个 n 阶和 $(k-1)n-\binom{k}{2}$ 级的图，其中每个子图的最小度至多为 $k-1$。[提示：仿照引理 18 的证明。]

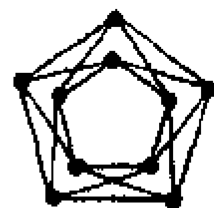
12⁻．证明：n 阶和 $(k-1)n-\binom{k}{2}+1$ 级的图包含每个 $k+1$ 阶的树。

13．令 G 是不包含奇圈和圈的任何对角线的 n 阶图，证明：如果 $n\geqslant 4$，则 G 至多有 $2n-4$ 条边。

证明：如果 $n\geqslant 6$ 和 G 有 $2n-4$ 条边，则 G 是完全二部图 $K(2,n-2)$。[提示：考虑 G 中的一条最长的路。]

14⁻．令 $k\geqslant 1$ 并令 G 是没有长小于 $2k+1\geqslant 5$ 的奇圈的 n 阶图，证明：$\delta(G)\leqslant\lfloor n/2\rfloor$ 且除非 $n=2k+1=5$，$T_2(n)$ 是仅有的极图，在这种情形中，还有另一个极图 C^5。

15⁺．令 G 是没有长小于 $2k+1\geqslant 5$ 的奇圈的 n 阶图，证明：如果 G 不包含 $[n/2]$ 个独立顶点，则 $\delta(G)\leqslant 2n/(2k+1)$。证明：仅对 $n=(2k+1)t$ 等号成立；此时极图是将圈 C^{2k+1} 的每个顶点用 t 个顶点来代替而得到的，如图Ⅳ.6所示。



图Ⅳ.6．图 $C^5(2)$。

16．令 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是欧几里得空间中范数至少为 1 的向量，证明：最多存在 $\lfloor n^2/4\rfloor$ 个无序对 i,j，使 $|x_i+x_j|<1$。[提示：证明如果 $|x_1|=|x_2|=|x_3|=1$，则对某个 i，j，

$1\leqslant i<j\leqslant 3$，$|x_i+x_j|\geqslant 1$。]

17⁺. 令 X 和 Y 是在欧几里得空间中取值的独立的恒等分布的随机变量，证明：对每个 $x\geqslant 0$，$P(|X+Y|\geqslant x)\geqslant\frac{1}{2}P(|X|\geqslant x)^2$。

18. 令 $x_1,x_2,\cdots x_{3p}\in\mathbf{R}^2$，且 $|x_i-x_j|\leqslant 1$，证明：至多有 $3p^2$ 个距离 $|x_i-x_j|$ 大于 $\sqrt{2}/2$。[提示：证明在任何四个点中，存在两个其相互的距离不超过 $\sqrt{2}/2$ 的点。]

19. 图 G 的**团数** $cl(G)$ 是 G 的完全子图的最大阶，证明：如果一个 n 阶正则图包含 $[n/2]+1$ 阶完全子图，则它是完全图。但是，对每个 p，$1\leqslant p\leqslant n/2$，存在具有 $cl(G)=p$ 的 n 阶正则图。

20⁻. 如果 G 的每条边至少关联于集 $W\subset V(G)$ 中的一个顶点，则说**集 W 覆盖 G 的边**。用 $\alpha_0(G)$ 表示覆盖 G 的边的顶点之最小数目。证明：如果 G 有 n 个顶点和 m 条边，则 $\alpha_0(G)\leqslant 2mn/(2m+n)$，等号成立当且仅当对某个 p 和 r，$G=pK^r$，即当且仅当对某个 r，G 的每个分支都是 K^r。[提示：注意，$\alpha_0(G)=n-cl(\overline{G})$†，而如果 $cl(\overline{G})=p$，则依 Tura'n 定理，$e(\overline{G})\leqslant t_p(n)$，故 $m=\binom{n}{2}-e(\overline{G})\geqslant\binom{n}{2}-t_p(n)$。]

21. (参看推论 14) 令 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_n$ 是一个可图序列，而且对某个 h 有

---

† 此处 $\overline{G}$ 是 G 的补图。——校注。

$$d_k \leqslant k < \frac{n}{2} \quad 和 \quad d_{n-k} \leqslant n-k-1。$$

证明：存在非哈密顿图 G，其顶点集为$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，且 $d(x_i) \geqslant d_i$，$1 \leqslant i \leqslant n$（见图Ⅳ.7）



图Ⅳ7．图$(K^3 \cup E^3)+K$没有哈密顿圈，而$(K^2 \cup E\ )+K_2$没有哈密顿路。

22.（参看推论14）令 $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n$ 是一个可图的序列，而且对某个 k 有

$$d_k \leqslant k-1 < \frac{1}{2}(n-1) 和 d_{n+1-k} \geqslant n-k。$$

证明：存在一个图 G，其顶点集为$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，而且 $d(x_i) \geqslant d_i$，$1 \leqslant i \leqslant n$，$G$ 不包含哈密顿路（见图Ⅳ.7）。

23. 证明：$n \geqslant 3$ 阶的非哈密顿图至多有$\binom{n}{2}-(n-2)$条边且存在唯一的极图。

证明：不包含哈密顿路的 $n \geqslant 2$ 阶图至多有$\binom{n}{2}-(n-3)$条边且 $K^{n-1} \cup E^1$ 是唯一的极图。

24. 给定 $\delta < n/2$，确定具有 $\delta(G)=\delta$ 且不包含哈密顿圈（路）的 n 阶图中边数的最大值。

25. 利用一条最长的 x_0—路 $P = x_0 x_1 \cdots x_l$ 的简单变换来证明定理 4。[提示：应用对 n 的归纳法。如果 $\delta(G) \leqslant k/2$，结果由归纳法证明，否则考虑 P 的简单变换的端点集

L。记 $l=|L|$，$r=\max_{x\in L} d(x)$，并注意 $l\geqslant r$ 和每个 $x\in L$ 的各邻接顶点包含在$\{x_l, x_{l-1}, \cdots, x_{l-k+1}\}$中。推导 $e(G)-e(G-L)\leqslant l(k-l)+l(r+l-k)\leqslant kl/2$，然后把归纳假设用于 $G-L$ 来完成证明。]

26. 令 $1<a_1<a_2<\cdots<a_k\leqslant x$ 都是自然数，假设没有一个a_i 可以除尽任何其它两个之积，证明：$k\leqslant\pi(x)+x^{2/3}$，此处象通常一样，$\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数的数目。[提示：记 $V_1=\{1,2,\cdots,[x^{2/3}]\}$和 $V_2=\{x: x^{2/3}\leqslant b\leqslant x$ 而 b 是素数$\}$。首先证明：$a_i=b_ic_i$，此处 b_i，$c_i\in V=V_1\cup V_2$。令 G 是具有顶点集 V 的图（带有自环），其边（自环）是 b_ic_i。注意，G 不包含长为 3 的路。]

27[+]. （参看练习 26）令 $1<a_1<a_2<\cdots<a_k\leqslant x$ 都是自然数，假设除非$\{i,j\}=\{h,l\}$，$a_ia_j\neq a_ha_l$，证明：对某个常数 $c>0, k\leqslant\pi(x)+cx^{3/4}$。[提示：练习 26 的图 G 不包含四边形。把定理 8 应用于具有顶点类 V_1 和 V_2 的 G 的二部子图。回忆素数定理，即当 $x\to\infty$ 时，$(\pi(x)\log x)/x\to 1$。]

28. 用 $D_k(n)$表示在 $\mathbf{R}^k$ 的 n 个点中同样的正距离可能出现的最大数目。证明：如果 $k\geqslant 2$，则 $\lim_{n\to\infty} D_k(n)/n^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}[k/2]\right)$。[提示：(i)注意如果 $\mathbf{x}\in\{\mathbf{z}\in\mathbf{R}^k: z_1^2+z_2^2=1$ 和当 $i>2$ 时 $z_i=0\}$ 和 $\mathbf{y}\in\{\mathbf{z}\in\mathbf{R}^k: z_3^2+z_4^2=1$ 和当 $i\neq 3$ 或 4 时 $z_i=0\}$，则 $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=\sqrt{2}$，(ii)由定理 20 导出 $D_k(n)$不小于问题中所要求的式子。]

注

在本节中介绍的关于哈密顿圈和路的结果全引自 G.A.Dirac, Some theorems on abstract graphs, Proc.London Math.Soc.2 (1952) 69—81。在§3 中讨论的k—闭包概念是在下文中引入的，J.A.Bondy and V.Chvátal, A method in graph theory, Discrete Math.15(1976)111—135；表征最小强迫哈密顿的度序列的推论14见于V. Chvátal, On Hamilton's ideals, J. Combinatorial Theory Ser.B 12(1972)163—168。关于3次图（即3—正则图）的定理17的特殊情况由C.A.B. Smith所证明，首先见于W.T. Tutte, On Hamilton circuits, J. London Math.Soc.21(1946)98—101；该定理本身属于A.G.Thomason, Hamiltonian cycles and uniquely edge colourable graphs, Annals of Discrete Math.3(1978)259—268。

Turán的关于完全子图的基本定理见P. Turán, On an extremal problem in graph theory（匈牙利文），Mat. és Fiz. Lapok 48(1941) 436—452；它的推广即定理6给出了关于不包含K^r的图的度序列更多的信息，见P.Erdős, On the graph theorem of Turán（匈牙利文），Mat.Lapok 21(1970)249—251。Erdős—Stone定理见P. Erdős and A. H. Stone, On the structure of Linear graphs, Bull.Amer.Math. Soc. 52(1946)1087—1091，它的推广即定理20见B.Bollobás and P. Erdős, On the structure of edge graphs, Bull.London Math.Soc.5 (1973) 317—321。在§4末尾提到的关于极图构造的结果的相当详细的说明可在B.Bollobás的书的第Ⅵ章中找到，Extremal Graph Theory, Academic Press, London—New York—San Francisco, 1978；同一书的第Ⅲ章讨论圈，那里有比我们本书介绍的更多的结果。

第Ⅴ章　着　　色

我们要安排会议的一些演讲的议程，使与会者都能听到他们要听的演讲，即不发生冲突，假设有足够的演讲厅，会议能举行任意次演讲，会议的议程将持续多久？我们用图论术语重新叙述这个问题：令 G 是一个图，其各顶点是各个演讲，两个演讲被联结当且仅当有一个与会者希望能听到这两个演讲。把 $V(G)$ 分成 k 类 V_1，V_2，…，V_k，使得没有 G 的边联结同一类中的两个顶点，这样的 k 的最小值是多大？象在第Ⅳ章§4中那样，我们用 $\chi(G)$ 表示这个最小值，并称它为图 G 的**（顶点）色数**。这个术语起源于 $\chi(G)$ 通常的定义：G 的顶点的一个**着色**是把 G 的每个顶点着上一种颜色。使邻接的顶点有不同的颜色，这时，$\chi(G)$ 是 G 的顶点着色中所用颜色数的最小值。

此处我们说明，如果只有少数几种颜色，则我们用实际的颜色（红，蓝，…），否则，将用自然数表示我们使用的"颜色"，于是，G 的顶点的一个 k—着色是一个函数 c：$V(G)\longrightarrow\{1,2,\cdots,k\}$，使每个顶点集 $c^{-1}(j)$ 都是独立的。

另一个排序问题如下：n 个实业家中的每一个都希望同其它一些举行机密会谈，假设每次会谈持续一天，并且每次会谈恰有两个实业家参加，会议多少天才能结束？对这种情况，我们考虑图 H，其顶点对应于 n 个实业家，而两个顶点被联结当且仅当这两个实业家希望举行会谈，于是上面的问

题是要寻求 H 的一个边着色中所用到的颜色的数目的最小值。所谓 H 的一个**边着色**是 H 的边的这样一种着色，其中没有两条邻接的边有相同颜色，这个最小值用 $\chi'(H)$ 表示，称它为 H 的**边色数**。

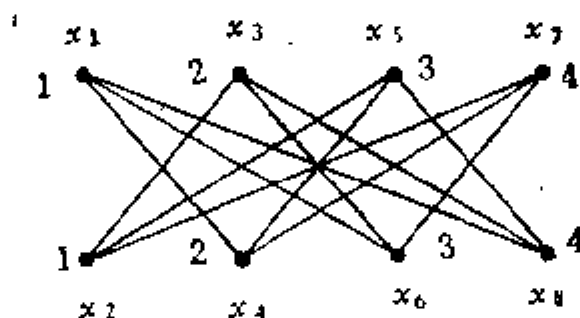
在本章中，我们将介绍顶点色数和边色数的一些基本性质，最后一节（§3）是关于可平面图的着色及图论中最著名的结果，即所谓四色定理的证明梗概。

§1 顶点着色

在第Ⅰ章§2中，我们提到过一个平凡的事实，即一个图是二部图当且仅当它不包含奇圈。这样，$\chi(G)\geqslant 2$ 当且仅当 G 包含边；$\chi(G)\geqslant 3$ 当且仅当 G 包含奇圈。对于 $k\geqslant 4$，虽然存在某些复杂的特征（参考练习 32—35），但是没有关于与色数至少为 k 的图相似的特征。当然，如果 $G\supset K^k$，则 $\chi(G)\geqslant k$；如果 G 不包含 $h+1$ 个独立的顶点，则 $\chi(G)\geqslant |G|/h$。很不容易看出这里是否存在色数很大而没有三角形的图（练习 11），不过在第Ⅶ章中我们将证明，存在具有任意大的色数和任意大围长的图。我们寻求这样的图时遇到的困难表明，想获得具有大色数的图的较简单的特征可能是不实际的，所以，我们将注意力集中于寻求对一个图进行着色的有效方法。

我们怎样对一个图的顶点进行着色，使其具有颜色 1，2，…，而且所用颜色尽可能的少呢？一种简单的方法如下：把顶点编上号 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，然后，把它们逐一着色：把 x_1 着上颜色 1；如果 $x_1x_2\notin E(G)$，再把 x_2 也着上颜色 1，否

则，把x_2着上颜色2，等等，即把每个顶点着上在现阶段可以使用的最小的颜色。这种所谓**贪婪算法**确实产生了一种着色，但是，这种着色可能并且通常使用了比必须的数目更多的颜色。图Ⅴ.1给出了一个二部图（即2—可着色的图），贪婪算法使用了四种颜色。但是，显而易见（练习3）对于每个图，可用某种方法把其顶点编上号，让贪婪算法使用尽可能少的颜色。因此，研究顶点的各种排列次序和贪婪算法所必须使用的颜色的数目，就是非常自然的事了。



图Ⅴ.1、按次序x_1，$x_2 \cdots x_8$，贪婪算法必须用四种颜色。

我们先提出该算法的一个直接推论。

定理1. 令$k = \max\limits_{H} \delta(G)$，此处最大值是对$G$的所有导出子图取的，则$\chi(G) \geqslant k+1$。

证明： 把一个至多k度的顶点记作x_n，并记$H_{n-1} = G - \{x_n\}$。依据假设，H_{n-1}中存在一个顶点，其度至多为k，令x_{n-1}是这样的一个顶点，且记$H_{n-2} = H_{n-1} - \{x_{n-1}\} = G - \{x_n, x_{n-1}\}$。继续此过程，我们就把所有的顶点排成一个序列。

现在，所得到的序列是这样的：每个x_j联结于其前面的至多k个顶点，因此，算法决不需要用第$k+2$种颜色来对某个顶点进行着色。 □

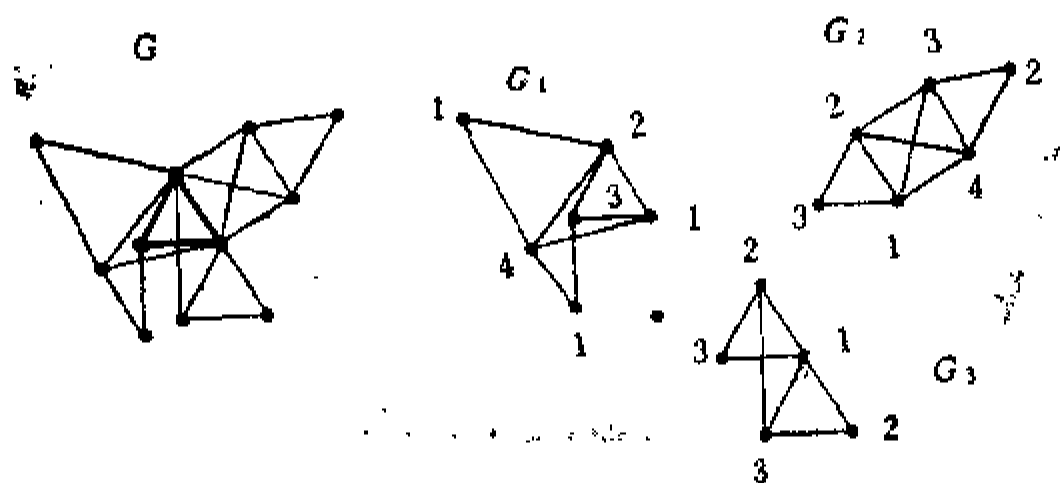
当然，贪婪算法的有效性是很容易改进的。如果我们已

经知道，子图 H_o 可用少数颜色着色，特别是，如果知道 H_o 的用 $\chi(H_o)$ 种颜色的一种着色，则能从 H_o 的各顶点开始我们的序列：用有效方法对 H_o 着色，然后才应用该算法对其余顶点着色，这给出定理 1 的如下推广。

定理 2. 令 H_o 是 G 的一个导出子图，并且假定满足条件 $H_o\subset H\subset G$ 和 $V(H_o)\neq V(H)$ 的每个子图 H 包含一个顶点 $x\in V(H)-V(H_o)$，使 $d_H(x)\leqslant k$，则

$$\chi(G)\leqslant \max\{k+1,\chi(H)\}$$ □

在某些情形下，能将一个图着色的问题化成它的某些子图的着色问题。如果一个图是不连通的或有割点，或更一般化一些，包含一个完全子图，删除其顶点集就使原图变成为不连通的图，情况都是如此，这时，我们可以对每个部分分别着色，因为，在必要的时候，改变一下记号，就能把这些着色配合起来，得到原图的一种着色，如图 Ⅴ.2 所示。



图Ⅴ.2、删除粗线三角形的顶点集，使 G 不连通；
$\chi(G)=\max\{\chi(G1),\ \chi(G2),\ \chi(G3)\}$。

作为定理 1 的一个相当简单的推论，我们有 $\chi(G)\leqslant$

$\Delta+1$，此处 $\Delta=\Delta(G)$ 是 G 的最大度，这是因为 $\max\limits_{H}\delta(H)\leqslant\Delta(G)$。并且，如果 G 是连通的但不是 Δ—正则的，则显然有 $\max\limits_{H\subset G}\delta(H)\leqslant\Delta-1$，故 $\chi(G)\leqslant\Delta$。下面的结果属于 Brooks，是关于正则图的。

定理 3. 令 G 是具有最大度 Δ 的连通图，假设 G 既不是完全图也不是奇圈，则 $\chi(G)\leqslant\Delta$。

证明： 我们已经知道在不失一般性的前提下，可以假设 G 是 2—连通的和 Δ—正则的。并且可以假设 $\Delta\geqslant3$，这是因为一个 2—正则的 3 色图是一个奇圈。

如果 G 是 3－连通的，令 x_n 是 G 的任一顶点，而 x_1，x_2 是 $\Gamma(x_n)$ 中的两个不邻接的顶点。如果 G 不是 3—连通的，令 x_n 是 G 的一个顶点，使 $G—x_n$ 是可分的$^{+}$，故它至少有两个块，因为 G 是 2—连通的，$G-x_n$ 的每个端块有一个顶点邻接于 x_n。令 x_1 和 x_2 是属于不同端块的两个顶点。

无论哪一种情形，我们已找到了这样的三个顶点 x_1，x_2 和 x_n，使 $G—\{x_1, x_2\}$ 是连通的，$x_1x_2\notin E(G)$，但 $x_1x_n\in E(G)$ 和 $x_2x_n\in E(G)$。令 $x_{n-1}\in V-\{x_1,x_2,x_n\}$ 是 x_n 的一个邻接顶点，令 x_{n-2} 是邻接于 x_n 或 x_{n-1} 的一个顶点，等等。则 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 是这样的序列，使除 x_n 外每个顶点都与其后的至少一个顶点邻接。因为 x_1 和 x_2 有同样的颜色，而 x_n 与 x_1 及 x_2 都邻接，所以，贪婪算法至多使用 Δ 种颜色。 □

另一个着色算法，把问题化成对于 G 所导出的另外两个

+ 一个图若有一个割点，就称它为可分的。——校注。

图的着色，这种化法也能使我们得到关于用给定的颜色集对一个图的着色的数目的某些信息。

令 a 和 b 是一个图 G 的两个不邻接的顶点，令 G' 是由 G 联结 a 和 b 得到的图，G'' 是由 G 等同 a 和 b 而得到的图，即在 G'' 中用一个新顶点 ab 来代替 a 和 b，再把与 a 和 b 中至少一个邻接的顶点同 ab 联结起来，就得到 G''（图Ⅴ.3）。a 和 b 有不同颜色的 G 的各种着色同 G' 的各种着色 1—1 对应，事实上，$c:V(G)\to\{1,2,\cdots\cdots,k\}$是 G 的使 $c(a)\neq c(b)$ 的着色当且仅当 c 是 G' 的着色。同样，使 a 和 b 具有同样颜色的 G 的各个着色与 G'' 的各个着色 1—1 对应。特别是，如果对于一个自然数 x 和图 H，我们用 $p_H(x)$ 表示图 H 用颜色 $1,2\cdots$，x 的着色的数目[1]，则

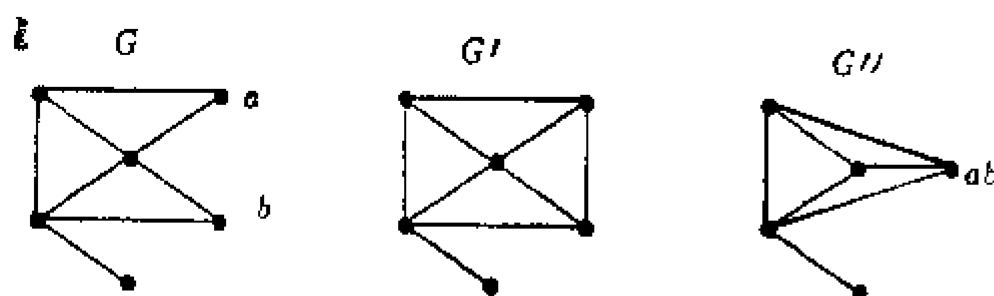
$$p_G(x)=p_{G'}(x)+p_{G''}(x) \tag{1}$$

依定义，$\chi(G)$是使 $p_G(k)\geqslant 1$ 的最小自然数 k。

这样，上面的论述和关系式(1)蕴含

$$\chi(G)=\min\{\chi(G'),\chi(G'')\}。 \tag{2}$$

下面的结果给出 $p_H(x)$的基本性质。



图Ⅴ.3.图 G' 和 G''。

定理 4. 令 H 是有 $n\geqslant 1$ 个顶点、m条边和 k 个分支的

[1] 允许有的颜色没有用到。——校注。

图，则

$$p_H(x)=\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i a_i x^{n-i},$$

此处 $a_0=1$，$a_1=m$，且对每个 $i(0\leqslant i\leqslant n-k)$，$a_i>0$。

证明：我们应用对 $n+m$ 的归纳法。对于 $m+n=1$，断言是平凡的，故我们转向归纳步骤。如果 $m=0$，证明就结束了，因为当这种情形时，$k=n$，而每个映射 $f: V(H)\to\{1,2,\cdots,x\}$ 都是 H 的着色，我们有 $p_H(x)=x^n$。如果 $m>0$，我们取 H 的两个邻接的顶点 a 和 b，记 $G=H-ab$，有 $G'=H$。因为 $e(G)=m-1$ 和 $|G''|+e(G'')\leqslant n-1+m$，依归纳假设，定理的断言对 $p_G(x)$ 和 $p_{G''}(x)$ 成立。现在注意，G'' 有 k 个分支而 G 至少有 k 个分支。因此有

$$p_G(x)=x^n-(m-1)x^{n-1}+\sum_{i=2}^{n-k}(-1)^i b_i x^{n-i},$$

此处对于每个 i 有 $b_i\geqslant 0$，及

$$p_{G''}(x)=x^{n-1}-\sum_{i=2}^{n-k}(-1)^i c_i x^{n-i},$$

此处对每个 i 有 $c_i>0$。因此，依(1)有

$$p_H(x)=p_{G'}(x)=p_G(x)-p_{G''}(x)$$

$$=x^n-(m-1)x^{n-1}+\sum_{i=2}^{n-k}(-1)^i b_i x^{n-i}-x^{n-1}$$

$$+\sum_{i=2}^{n-k}(-1)^i c_i x^{n-i}=x^n-mx^{n-1}+$$

$$\sum_{i=2}^{n-k}(-1)^i(b_i+c_i)x^{n-i}=x^n-mx^{n-1}$$

$$+\sum_{i=2}^{n-k}(-1)^i a_i x^{n-i},$$

此处对每个 i 有 $a_i>0$。 □

由于定理 4，我们理所当然地称 $p_H(x)$ 为 H 的**色多项式**。色多项式密切地联系着各种计数问题，它们中的一些将在第Ⅷ章中讨论。特别是，$p_H(x)$的每个系数的模都是 H的某种子图的数目（参考练习 12⁻）。

现在，我们来叙述基于化法 $G\to\{G', G''\}$ 的算法。给定一个图 G，构造图的一个序列 $G_0, G_1, \cdots$，如下：记 $G_0=G$，假设已经构造了 G_i，如果 G_i 是完全的，终止该序列，否则令 G_{i+1} 是 G_i' 或 G_i''。此序列也必终止于一个完全图 G_t，设其阶为 $|G_t|=k$，G_t 的一个 k—着色易于导出原图 G 的一个 k—着色，因此 $\chi(G)=k$。实际上，等式(2)表明，$\chi(G)$ 是使序列 G_0，$G_1, \cdots\cdots$ 终止的完全图的最小阶数。

还存在由化法 $G\to\{G', G''\}$ 处理的其他问题，其一个很好的例子是练习 16⁺。

§2 边 着 色

在图 G 的一个边着色中，与一个顶点关联的各边要用不同的颜色来着色，因此，边色数 $\chi'(G)$ 至少为最大度 $\Delta(G)=\max_x d(x)$，即

$$\chi'(G)\geqslant\Delta(G)。\tag{3}$$

对于许多种图类，其中包括二部图类，这个平凡的不等式实际上是个等式。这初看起来似乎有些奇怪，事实上，第Ⅲ章练习22断言：二部图的边集 $E(G)$ 可划分为 $\Delta(G)$ 个独立边集，即 $\chi'(G)=\Delta(G)$，这个结果是Hall定理的推论。

$\chi'(G)$的另一个平凡下界由下述事实推得：如果 G 不包含 $\beta+1$ 条独立边，则每一个颜色类至多有 β 条边，故我们至少需要 $\lceil e(G)/\beta\rceil$ 个颜色类才能照顾到所有的边，即

$$\chi'(G)\geqslant\lceil e(G)/\beta\rceil。\tag{4}$$

与第Ⅰ章定理9类似，很容易证明出如果 G 是 n 阶完全图，则（4）中等号成立，即如果 n 是偶数，则 $\chi'(K^n)=n-1$；如果 $n\geqslant 3$ 是奇数，$\chi'(K^n)=n$（练习28）。

我们怎样获得 $\chi'(G)$的上界呢？因为每条边至多与 $2(\Delta(G)-1)$ 条边邻接，定理1蕴含

$$\chi'(G)\leqslant 2\Delta(G)-1,$$

并且，如果 $\Delta(G)\geqslant 3$，Brooks定理给出

$$\chi'(G)\leqslant 2\Delta(G)-2。$$

初看起来，这个不等式似乎相当好，但是，下面的Vizing基本定理表明，实际上并非如此，因为边色数几乎可由最大度完全确定。

定理5. $\Delta(G)\leqslant\chi'(G)\leqslant\Delta(G)+1$

证明： 记 $\Delta(G)=\Delta$，并假设已使用了颜色 $1,2,\cdots,\Delta+1$，对除一条边之外的其它所有边着了色*。如果我们能

---

* 我们可以作这样的假定，因为可以在 G 中除去一些边，使剩下的图可用 $\Delta+1$ 种颜色着色，然后再把除掉的边一条一条地加回去。—— 校注。

证明，这条还未着色的边也能着色，证明就完成了。

如果与顶点 z 关联的各边都没有着上某种颜色，则说此颜色在顶点 z 处失落。如果 z 与已经着色的 $d'(z)\leqslant d(z)\leqslant\Delta$ 条边关联，则 $\Delta+1-d'(z)$ 种颜色在 z 点处失落。特别是，在每个顶点处至少有一种颜色失落。我们的目的是调整颜色和未着色的边，使某一种颜色在未着色的边的两个端点处同时失落，这就使我们能完成着色。

令 xy_1 是未着色的边，令 s 是在 x 点处失落的颜色，而 t_1 是在 y_1 点处失落的颜色。我们来构造边的一个序列 xy_1，xy_2，… 和颜色的一个序列 $t_1,t_2,\cdots$，使 t_i 在 y_i 点处失落，而 xy_i 有颜色 t_i。假设我们已经构造了 xy_1、$xy_2\cdots xy_i$，和 $t_1,t_2,\cdots t_i$。至多存在一条边 xy，它具有颜色 t_i。如果 $y\notin\{y_1,\cdots y_i\}$，我们令 $y_{i+1}=y$，且选取一个在 y_{i+1} 处失落的颜色 t_{i+1}，否则，我们便终止序列。这些序列至多在 $\Delta(G)$ 项处终止。令 xy_1，…，xy_h 和 t_1，…，t_h 是构造完成的序列，我们来考查使此两序列终止的两个原因。

(a) 没有边 xy 具有颜色 t_h。此时把边 xy_i $(i<h)$ 改着颜色 t_i。在我们得到的着色中，除了 xy_h 之外，每个边都着了颜色，但是，因为 t_h 既不出现在 x 点也不出现在 y_h 点，我们可对 xy_h 用 t_h 着色而结束着色。

(b) 对某个 $j<h$，边 xy_j 有颜色 t_h。首先，将边 xy_i $(i<j)$ 改着颜色 t_i，在这个着色中，未着色的边是 xy_j。令 $H(s,\ t_h)$ 是 G 的这样的子图，它是由具有颜色 s 和 t_h 的边构成的。$H(S,t_h)$ 的每个顶点至多与 $H(s,t_h)$ 中的两条边关联（一条有颜色 s,另一条有颜色 t_h），故 $H(s,t_h)$ 的分支

是路和圈。顶点x、y_i和y_h中的每一个在$H(s,t_h)$中的度至多是1，因此，它们不能属于$H(s,t_h)$的同一分支。这样，下面两种情形至少有一种成立。

(b_1) 顶点x和y_i属于$H(s,t_h)$的不同分支。交换包含y_i的分支中的颜色s和t_h，则s在顶点x和y_i处都失落，因此，我们给xy_i以颜色s就完成了着色。

(b_2) 顶点x和y_h属于$H(s,t_h)$的不同分支，对每个$i<h$，仍将与x关联的边xy_i改着颜色t_i，从而使得只有xy_h没有着色，这个变化不包括有颜色s和t_h的边，故$H(s,t_h)$不改变。现在，改变包含y_h的分支的颜色，这个改变保证颜色s在x和y_h处都失落，因此，我们可以用s对至此还没有着色的边xy_h着色。 □

注意：上面的证明给出了用至多$\Delta+1$种颜色对边着色的一种算法。

§3 曲面上的图

图论中最著名的问题无疑是四色问题，即要证明每个平面图是4—可着色的。较弱的断言一每个平面图是5—可着色的，是尤拉公式的几乎直接的推论。

定理6. 每个平面图是5—可着色的。

证明： 假设断言不成立，令G是顶点数最少的6色平面图。依据第Ⅰ章定理12，G有一个度至多为5的顶点x，记$H=G-x$，则H是5—可着色的，设它具有颜色1,2,3,4,5。其中每种颜色必须用来对x的至少一个邻接顶点着色，否则的

话，失落的颜色可用来对 x 进行着色。因此，我们可以假设，x 有 5 个邻接顶点 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5。它们按某个次序围绕着 x，而 x_i 的颜色为 i，$i=1,2,3,4,5$。用 $H(i,j)$ 表示 H 的具有颜色 i 和 j 的各顶点生成的子图。

首先假设，x_1 和 x_3 属于 $H(1,3)$ 的不同分支。交换 x_1 所在的分支中的颜色 1 和 3，我们得到 H 的另一个 5—着色。但是，在这个 5—着色中，x_1 与 x_3 都有颜色3，故 1 没有用来对 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 中的任何一个顶点着色，因为这时可用颜色 1 对 x 着色，故这是不可能的。

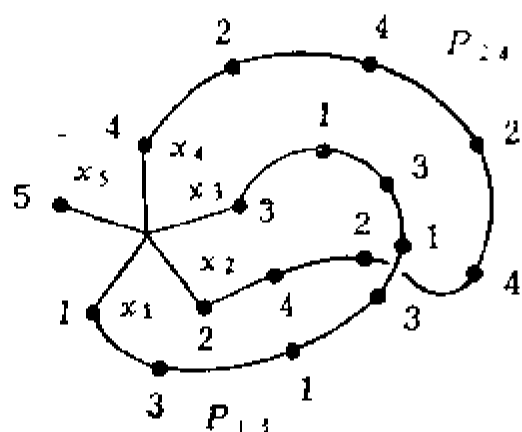


图 V.4.路 $P13$ 和 $P24$。

因为 x_1 和 x_3 属于 $H(1,3)$ 的同一分支，在 H 中存在 x_1—x_3 路 P_{13}，其各顶点用颜色 1 和 3 着色。同样，H 含有 x_2—x_4 路 P_{24}，其各顶点用颜色 2 和 4 着色。但这是不可能的，因为 G 的圈 $xx_1P_{13}x_3$ 将 x_2 与 x_4 分开，而 P_{24} 不能与这个圈相交（图 V.4）。 □

显然不是每个平面图都是3—可着色的，事实上，K^4 是可平面图，而且它的确需要 4 种颜色。另一个 4—色可平面图是由联结 C^5 的所有 5 个顶点与第 6 个顶点得到的图。这样，如果我们要确定 $\chi_0=\max\{\chi(G)$：G 是可平面的$\}$，则直接看出 $\chi_0\geqslant4$ 和 $\chi_0\leqslant5$，而问题是要证明 $\chi_0\leqslant4$。

代替可平面图，我们可以考虑画在有亏格 $\gamma>0$ 的可定向

曲面上的图，并求这种图的色数的最大值 χ_γ。我们不久就能看出，在这个问题中，我们遇到另外一种困难。对于我们限定的目标，只要注意有**亏格 $\gamma \geq 1$ 的可定向曲面** S_γ 是由一个球面附上 γ 个"球柄"得到的，而画在 S_γ 上的 n 阶图至多有 $3n+6(\gamma-1)$ 条边。这样，S_1 是环面，而每个 n 阶园环图（即可画在环面上的图）至多有 $3n$ 条边。下面的关于画在亏格为 γ 的可定向曲面上的图的色数的上界是 Heawood 在 1890 年得到的。

定理 7. 对画在亏格 $\gamma \geq 1$ 的可定向曲面上图的着色所必需的颜色数至多是

$$H(\gamma)=\left\lfloor \frac{1}{2}\{7+\sqrt{1+48\gamma}\}\right\rfloor。$$

证明： 令 G 是问题中的图，H 是 G 的任一子图。依据定理 1，如果我们能证明 $\delta(H) \leqslant H(\gamma)-1$，证明就结束了。如果 H 有 n 个顶点，它至多有 $3n+6(\gamma-1)$ 条边，故

$$\delta(H) \leqslant \min\left\{n-1, 6+\left\lfloor \frac{12(\gamma-1)}{n}\right\rfloor\right\}$$

因此，如果有

$$6+\left\lfloor \frac{12(\gamma-1)}{H(\gamma)+1}\right\rfloor \leqslant H(\gamma)-1$$

结果就可得到。而稍加计算就可验证这个不等式确实成立。□

应用一个比平凡的定理 1 较强的着色结果，我们可以证明，除了包含 $H(\gamma)$ 阶完全图的图之外，$H(\gamma)-1$ 种颜色对 S_γ 上的图着色是足够了。这样，$\chi_\gamma=H(\gamma)$ 当且仅当 $K^{H(\gamma)}$

可以画在 S_γ 上。Heawood 对断言 $\chi_\gamma = H(\gamma)$ 作了一个错误的证明，75 年以后 Ringel 和 Youngs，作出第一个正确的证明。注意在这一深刻结果的证明中，困难在于寻求在亏格 $\gamma>0$ 的曲面上一个固定的图 $K^{H(\gamma)}$ 的画法。另一方面，为了解决四色问题，我们必须证明，每个平面图能用四种颜色着色。这样，确定 χ_0 的问题几乎与确定 $\chi_\gamma(\gamma\geq 1)$ 的问题毫不相干。

在简要叙述有关四色问题的解之前，我们指出，$H(1)=7$ 是容易证明的，实际上，它确实被 Heawood 证明了。我们需要证明的仅仅是 K^7 可以画在环面上。我们还记得环面可由矩形把其两对对边分别重叠起来而得到，图Ⅴ.5 就表示了所要求的画法。

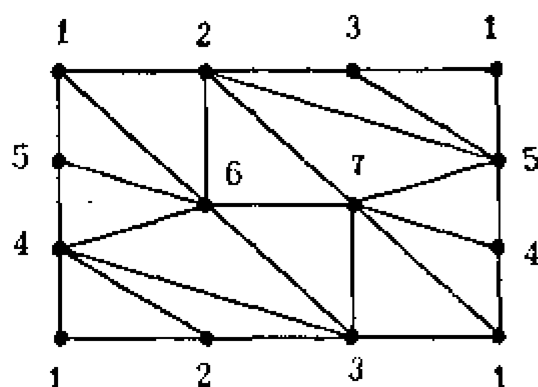


图 Ⅴ.5，K^7 画在环面上的一种画法。

我们在第Ⅰ章 §4 中看到，一个平面图 G 确定一个地图 $M=M(G)$，它由平面图 G 和被平面图确定的各个国家组成。一张地图的着色是对各个国家进行着色，使得任何两个有公共边界的国家都有不同的颜色。证明这个平面地图可用四种颜色着色，这是四色问题的最初形式，它由 Francis Guthrie 在1852 年提出，他的导师 de Morgan 在他的同事中传播了这个问题，但是，此问题在 1878 年得以闻名是 Cayley 的功劳，因为他在皇家协会上提出了这个问题。“证明”几乎立刻就出现了：Kempe 的“证明”发表在 1879 年，而

Tait 的"证明"发表在1880年。Heawood 对 Kempe 证明的反驳发表于1890年，然而，他修改了 Kempe的证明得到了五色定理。Tait 的论文包含了错误的假设，但它提醒了 Petersen 在1891年得出如下结论：四色定理与每个三次可平面图的边色数为三这一猜想是等价的(练习27)。自本世纪初以来，对这个问题解答的贡献包括：Birkhoff引入的色多项式和若干作者给出一个可能的反例的阶的下界的工作。在1943年，Hadwiger 提出了包括四色问题为其特殊情形的深刻猜想：如果 $\chi(G)=k$，则 G 可收缩于 K^k（练习18—20）。

在后来的研究中认识到，最重大的进展是 Heesch 作出的，他发展了一种排除法以寻求可约构形的不可避免集。问题最后被 Appel 和 Haken 在1976年解决，他们使用改进的 Heesch 方法以及快速电子计算机。有兴趣的读者可以参看 Appel 和 Haken 的一些论文，或参看 Saaty 和 Kainen 的书，该书给出这个证明的基本思想的详细说明。这里我们只能给出若干粗浅的说明。

什么原因使得五色定理为真呢？有下面两个事实：(i) 极小 6—可着色的平面图不能含有至多 5 度的顶点。(ii) 平面图必包含有至多 5 度的顶点。我们进一步要问：(i)与(ii)为什么能成立呢？这只要看一看其证明就清楚了。(i) 的证明是巧妙地使用了路 P_{ij},它以Kempe的名字命名为 Kempe 链，因为 Kempe 在1879年的错误证明中使用了这种链，而(ii)由尤拉公式 $n-e+f=2$ 直接得到。

对四色问题的攻击沿着类似的路线进行。一个**构形**是平

面图的一连串连通的顶点与这些顶点的度。如果没有极小5色平面图能包含某个构形，就说此构形是**可约的**。一个构形集称为**不可避免的**，如果每个平面图至少包含这个构形集中一个构形。为了证明每个平面图是4—可着色的，我们先来寻求可约构形的一个不可避免集。怎样证明一个构形是可约的呢？用较少的一串顶点代替这一串顶点，4—着色所得到的这个较小的图，并用Kempe链证明，此4—着色可以“返回”到原图。怎样证明一个构形集是不可避免的呢？要多次使用尤拉公式。当然，我们总可以假设，该图是极大平面图。让每个k度顶点带有$6-k$单位电荷，尤拉公式保证总电荷是12个单位，围绕各顶点推动电荷，即把某个电荷从一个顶点转送到与其邻接的某些顶点，直到我们知道该平面图必包含构形之一为止。

再来看五色定理。我们看到，其证明是基于事实：度至多为5的单个顶点的构形集是构形的一个不可避免集（对五色定理）。

上面的概要没有指明实际证明中的困难。为了稍微纠正一下这个缺点，我们指出，Appel和Haken必须寻求超过1900个构形来完成其证明。并且，我们请读者证明下面两个简单的断言。

1. 在图Ⅴ.6中的各构形是可约的。

2. 令G是一个至多25阶且最小度为5的极大可平面图。如果一个顶点的度至少是7，就称该顶点为**主要顶点**，否则称为**次要顶点**，则G包含下列三种情形之一：

(a) 一个次要顶点具有3个相继邻接的5度顶点。

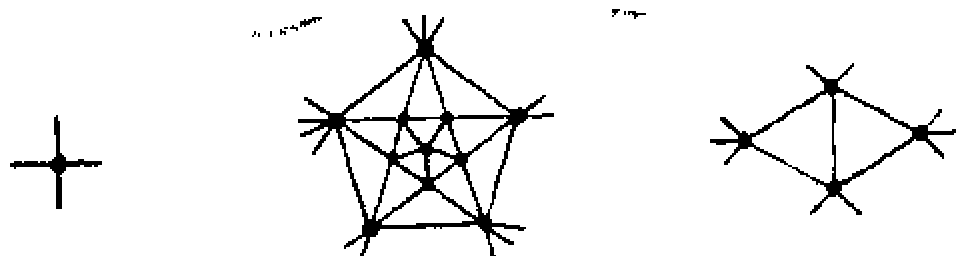


图 $V_{.}6$ 三个可约构形；在第二个例子中外面的顶点可以有任意度。

(*b*) 一个 5 度顶点仅有一个邻接的次要顶点。

(*c*) 一个主要顶点至多有一个度最少为 6 的邻接顶点。

〔练习〕

1. 证明：图 G 至少有 $\binom{\chi(G)}{2}$ 条边。

2. 对每个 $k\geqslant 3$，找出一个二部图，使其顶点为 $x_1, x_2\cdots, x_n$，而贪婪算法使用 k 种颜色对它着色。当 $n=2k-2$ 时，能够完成吗？证明：对于 $n=2k-3$ 不能完成。

3. 给定一个图 G，指定其顶点的次序，使其贪婪算法仅使用 $k=\chi(G)$ 种颜色。

4. 令 $d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_n$ 是图 G 的度序列，证明：按次序 $x_1x_2, \cdots x_n$，$(d(x_i)=d_i)$，贪婪算法至多使用 $\max\min\{d_i+1, i\}$ 种颜色，故如果 k 是最大自然数，使得 $k\leqslant d_k+1$，则

$$\chi(G)\leqslant k。$$

5. 由练习 4 推导：如果 G 有 n 个顶点，则

$$\chi(G)+\chi(\overline{G})\leqslant n+1。$$

6*. 证明：$\chi(G)+\chi(\overline{G})\geqslant 2\sqrt{n}$。

7. 令 d、d_1 和 d_2 是满足条件 $d_1+d_2=d-1$ 的非负整数，证明：如果，$\Delta(G)=d$，则 G 的顶点集 $V(G)$ 可以划分成两类，设为 $V(G)=V_1\cup V_2$，使图 $G_i=G[V_i]$ 满足不等式 $\Delta(G_i)\leqslant d_i$，$i=1, 2$。〔提示：考虑使 $d_1e(G_2)+d_2e(G_1)$ 为最小的划分 $V(G)=V_1\cup V_2$。〕

8. （续练习 7）现在令 $d,d_1,d_2,\cdots,d_r$ 是满足条件 $\sum_{i=1}^{r}(d_i+1)=d+1$ 的非负整数，证明：如果 $\Delta(G)=d$，则存在划分 $V(G)=\bigcup_{i=1}^{r}V_i$，使图 $G_i=G[V_i]$ 满足条件 $\Delta(G_i)\leqslant d_i$，$i=1,2,\cdots,r$。

9. 给定自然数 r 和 $t(2r\leqslant t)$，Kneser 图 $K_t^{(r)}$ 的构造如下：它的顶点集是 $T=\{1,2,\cdots t\}$ 的 r 元子集的集合 $T^{(r)}$，而两个顶点被联结当且仅当它们是 T 的不相交子集。图 Ⅴ.7 给出了称为 Petersen 图的图 $K_5^{(2)}$，证明：$\chi(K_t^{(r)})\leqslant t-2r+2$，$\chi(K_5^{(2)})=3$ 和 $\chi(K_6^{(2)})=4$。

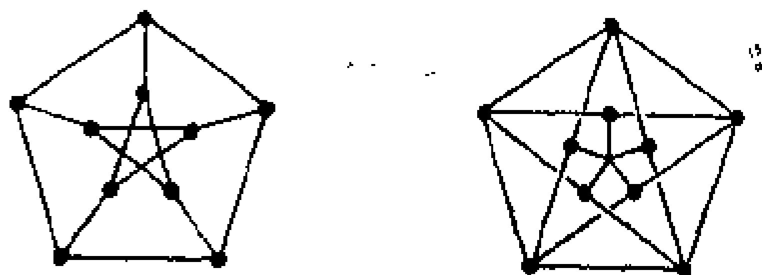


图 Ⅴ.7 Petersen 图和 Grötzsch 图。

10. 验证 Grötzsch 图（图 Ⅴ.7）的围长为 4 而色数为

4。证明：不存在围长至少为 4 且色数为 4 的 10 阶图。

11⁺. 不参看第Ⅵ章或第Ⅶ章，构造一个色数为 1526 的不含三角形的图。

12⁺. 令 H 是 n 阶图，它的各条边为 $e_1,e_2,\cdots,e_m$，色多项式是 $p_H(x)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i c_i x^{n-i}$。如果从一个圈的边集中删去下标最大的边，得到的边集称为一个**断圈**。证明：c_i等于不包含断圈的边的 i 元子集的数目。〔提示：仿照定理4的证明，把 ab 取作 e_1。记 $G=H-e_1$，故 $H=G'$ 而 $p_H(x)=pG(x)-p_{G''}(x)$。如果 G'' 的一条边来自 G 的两条边，设来自 $xa=e_i$ 和 $xb=e_h$，把它记作 e_k，此处 $k=\max\{i,h\}$，否则，保持其在 G 中（和 H 中）的标号。令 F 是 H 的不含 H 的断圈的一个边集。注意如果 $e_1\notin F$，则 F是G 的不含断圈的边集；如果 $e_1\in F$，则$F-\{e_1\}$是 G'' 的不含断圈的边集。〕

13. 令 $p_G(x)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i x^{n-i}$ 是 G 的色多项式，证明：$a_2=\binom{m}{2}-k_3(G)$，此处 $m=e(G)$，而 $k_3(G)$是 G 中的三角形的数目。

14. 证明：存在唯一的一个 n 阶和 $m=[n^2/4]$ 级的图 G_0，使得如果 G 也是 n 阶和 m 级的图，当 x 充分大时，有

$$p_G(x)\leqslant p_{G_0}(x)$$

15⁻. 寻求两个 n 阶的同级的图 G与H，使得 $\chi(G)<\chi(H)$，但对充分大的 x 有 $p_G(x)<p_H(x)$。

16⁺. 给定至少包含一个圈的连通图 G，在 G 的所有生成树的集合 S 上定义图 H，其中联結 T_1 与 T_2 当且仅当 $|E(T_1)\backslash E(T_2)|=1$（参看79页上的一条 x—路的简单变换）。仿照对 $p_H^{(x)}$ 是多项式（定理4）的证明及练习12⁺中所提示的证明来证明 H 不仅是哈密顿图，而且它的每条边都包含在一个哈密顿圈中。

17⁺. 我们说 G 有可收缩于具有顶点集 $\{y_1, y_2, \cdots, y_k\}$ 的图 H 的子图，如果 G 包含顶点不重的连通子图 $G_1, G_2, \cdots G_k$，对于 $i \neq j$，$y_i y_j \in E(H)$ 当且仅当 G 有一条 G_i—G_j 边。

证明：对每个自然数 p，存在这样的最小整数 $c(p)$，使每个色数至少为 $c(p)$ 的图都有可收缩于 K^p 的子图。证明：$c(1)=1$，$c(2)=2$，而对 $n \geqslant 2$ 有 $c(n+1) \leqslant 2c(n)-1$。［提示：取 $x_0 \in G$，令 S_k 是中心在 x_0 和半径为 k 的"球面"：$S_k=\{x \in G: d(x_0, x)=k\}$。证明：对某个 k，有 $\chi(G) \leqslant \chi(S_k)+\chi(S_{k+1})$。］

18⁺. Hadwiger 猜想说：对每个 p，$c(p)=p$。对 $p \leqslant 4$ 证明这一猜想。

19. 由 Kuratowski 定理，即第I章的定理13来推导：一个图是可平面图当且仅当它没有可收缩于 K^5 或 $K^{3,3}$ 的子图。

20. 证明：对 $p=5$ 的 Hadwiger 猜想的真实性蕴含四色定理。

21⁺. 证明：地图 $M=M(G)$ 可以2—着色（参看96页）当且仅当 G 的每个顶点的度都为偶数。

22⁺. 假设 G 是三次平面图，证明：地图 $M=M(G)$ 是

3—可着色的当且仅当每个国家有偶数条边线。

23⁻. 令 $M=M(G)$ 是一个三角形地图，即在其中每个国家都有三条边线，证明：除非 $G=K^4$，M 是 3—可着色的。

24⁻. 证明：如果 G 有哈密顿圈，地图 $M=M(G)$ 是 4—可着色的。

25⁻. 对每个平面图 G，构造一个三次平面图 H，使如果 $M(H)$ 是4—可着色的，则 $M(G)$ 也是 4—可着色的。

26⁻. Tait 猜想说：每个 3—连通的三次平面图都有哈密顿圈。(i) 证明 Tait 猜想蕴含四色定理。(ii) 检查图 Ⅴ.8 中的图，以示 Tait 猜想是不对的。

27⁺. 令 G 是三次平面图，证明：G 是 3—边—可着色的当且仅当 $M(G)$ 是 4—可着色的。〔提示：令 $1,a,b$ 和 c 是 Klein 四元群 $c_2\times c_2$ 的元素，即 $a^2=b^2=c^2=1$。用 a、b 和 c 对边着色，而用 $1,a,b$ 和 c 对国家着色。〕

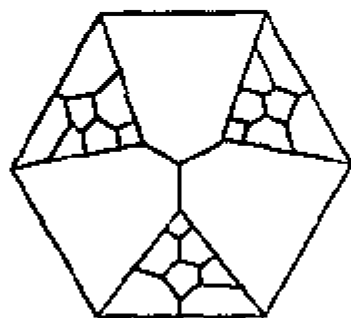


图 Ⅴ.8.对Tait 猜想的 Tutte 反例。

28⁻. 求 K^n 的边色数。

29. 三次图 G 恰有一个用 $\chi'(G)$ 种颜色的边着色。证明：$\chi'(G)=3$且 G 恰有三个哈密顿圈。

30. 令 $n=2^p$，证明：K^{n+1} 不是 p 个二部图的并，但K^n是 p 个二部图的并。推导：如果在平面上有 2^p+1 个点，则它们中的某三个点确定一个大小至少为 $\pi(1-(1/p))$ 的角。

31. 令 $\chi(G)=k$，其并为 G 的 r—色图的最少数目是多少？

32. 证明：一个k—色图可以这样来定向，使其中一条最长的有向路有 k 个顶点。

33. 证明：如果图 G 可以这样来定向，使其中没有包含多于 k 个顶点的有向路，则 $\chi(G) \leqslant k$。〔提示：删去破坏所有有向圈的边的一个最小集。对于一个顶点 x，令 $c(x)$ 是在新图中始于 x 的有向路上的顶点的最大数目。验证 c 是一个合用的着色。〕

34. 用 G_k 表示色数至少为 k 的图的（同构类的）集。令 G_1 和 G_2 是 G_k 中顶点不重的两个图，$a_i b_i$ 是 G_i 的一条边，$i=1,2$，令 $G=G_1 \nabla G_2$ 是在 $G_1 \cup G_2$ 中删去边 a_1b_1、a_2b_2 再添加边 b_1b_2 并把 a_1，a_2 等同起来得到图。（运算 ∇ 称为 Hajós 运算，参看图 V.9.）。证明：$G \in \mathsf{G}_k$

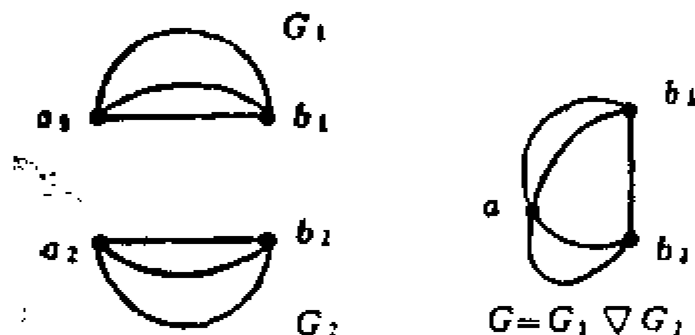


图 V.9. Hajós 运算。

35$^+$. 令 H_k 是满足下列四个条件的图的（同构类的）最小集：(i) $K^k \in \mathsf{H}_k$，(2) 如果 $H \in \mathsf{H}_k$ 和 $G \supset H$，则 $G \in \mathsf{H}_k$，(3) 如果 $H \in \mathsf{H}_k$ 而 G 是把 H 的二个不邻接的顶点等同起来得到的图，则 $G \in \mathsf{H}_k$，(4) 如果 $G_1, G_2 \in \mathsf{H}_k$ 而 $G=G_1 \nabla G_2$，则 $G \in \mathsf{H}_k$，证明：$\mathsf{H}_k = G_k$。〔提示：练习 33 蕴含 $\mathsf{H}_k \subset \mathsf{G}_k$。假设相反的包含关系不成立，令 $G \in \mathsf{G}_k \backslash \mathsf{H}_k$ 是阶最小而级最大的反例。G 不能是完全 q—部图，故它包含这样的顶点 a, b_1 和

b_2，使 $b_1b_2 \in E(G)$，但 ab_1，$ab_2 \notin E(G)$。令 $G_1 = G + ab_1$ 和 $G_2 = G + ab_2$，则 G_1 和 G_2 不是反例，故它们属于 $\mathbf{H}_k$。寻求用所允许的运算从若干个 G_1 和 G_2 来得到 G 的方法。〕

36. 令 k 是自然数，证明：一个无限图是 k—可着色的当且仅当它的每个有限子图都是 k—可着色的。〔提示：象在第Ⅱ章练习 24 那样，应用 Tychonov 定理。〕

注

定理 3 见于 R.L.Brooks, On colouring the nodes of a network, Proc. Cambridge Phil.Soc, 37(1941)194—197, Vizing 定理即定理 5 见 V.G.Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p—graph(俄文)Diskret. Analiz 3 (1964)23—30。关于在曲面上的图着色的结果在 Ringel 和 Youngs 对 Heawood 猜想的证明中达到顶点，关于这方面的详细叙述可在下列书中找到，Map Color Theorem, Grundlehren der math. Wiss.209, Springer—Verlag, Berlin, 1974。在四色定理的研究中使用的排除程序见 H.Heesch, Untersuchungen zum Vierfarbenproblem B-I-Hochschulskripten 810/810 a 810b, Bibliographisches Institut, Mannheim, Vienna, Zürich, 1969。四色定理的证明发表在 K.Appel and W.Haken, Every planar map is four colorable, Part Ⅰ: discharging, Illinois J. of Math. 21(1977)429—490 和 K.Appel, W.Haken and J.Koch, Every planar map is four colourable, Part Ⅱ: reducibility, Illinois J. of Math 21(1977) 491—567。四色问题的历史及其证明摘要可在下面的书中找到，T.L. Saaty and P.C. Kainen, The Four Color Problem, Assaults and Conquest, McGraw—Hill, New York, 1977。练习 7 和 8 的关于划分的结果见 L. Lovasz, on DecompOsition of Graphs, Studia Sci. Math, Hungar. 1(1966)237—238。

练习 33 中的结果属于 T. Gallai, On directed paths and circuits, in Theory of Graphs(P.Erdös and G.Katone, eds.), Academic Press, New York, 1968, 115—118，而练习 35 的证明属于 G.Hajós, über eine Kons-

truktion nicht n-farbbarer Graphen. Wiss. Zeitschr. Martin Luther Univ. Halle—Wittenberg, Math.—Natur. Reihe 10(1961)166—117。

着色自然是图论中很有吸引力的部分，该题目有许多文献，许多基本结果属于 G.A.Dirac，关于这些内容及其它结果可参看 B.Bollobas 书的第Ⅴ章，B.Bollobás, Extremal Graph Theory, Academic Press, London and New York, 1978。

第Ⅵ章　Ramsey 理论

试证明：在六个人的一次集合中，总有这样的一个三人小组，这小组的三个人或者都相互认识，或者都不相识。这是一个著名的诘难，它是 Ramsey 在 1928 年证明的定理的一种特殊情形。这个定理有许多深刻的推广，它们不仅在图论和组合论中是重要的，而且在集论（逻辑）和分析中是同样重要的。在本章中，我们将证明 Ramsey 原来的定理，指出它的某些变形，并介绍这些结果的若干应用。

§1　基本 Ramsey 定理

我们将考虑图和超图的边的划分。为方便起见，一个划分将被称为一种着色。但是要记住，这种意义的着色与在第Ⅴ章中考虑的边着色没有任何关系，邻接的边可以有同样的颜色，实际上，我们的目标是证明存在所有边都具有同样颜色的大子图。在 2—着色中，我们总是选取红和蓝作为着色用的颜色。如果一个子图的所有边都是红（蓝）的，则说这个子图是红（蓝）的。

给定一个自然数 s，存在一个这样的数 $n(s)$，使当 $n\geqslant n(s)$，则用红和蓝两种颜色对 K^n 的每个边着色，都包含或者红 K^s 或者蓝 K^s。为了证明这一结果并给出 $n(s)$ 的界，我们引入下面的记号：$R(s,t)$ 是使 K^n 的每个红—蓝着色都产生一个红 K^s 或一个蓝 K^t 的 n 的最小值（由于 K^1 无边，

我们约定每个 K^1 既是红的又是蓝的，故我们假设 $s,t\geqslant 2$. 对于每个 s 和 t，$R(s,t)$ 是有限的这一事实不是一开始就很明显的。但是，对每个 $s,t\geqslant 2$，显然有

$$R(s,t)=R(t,s),$$

和

$$R(s,s)=R(2,s)=s,$$

这是因为在 K^s 的每一个红—蓝着色中，或存在一条蓝边，或每条边都是红的。下面的结果表明，对于每个 s 和 t，$R(s,t)$ 是有限的，同时，它还给出 $R(s,t)$ 的一个界。

定理 1. 如果 $s>2$ 和 $t>2$，则

$$R(s,t)\leqslant R(s-1,t)+R(s,t-1) \tag{1}$$

$$R(s,t)\leqslant\binom{s+t-2}{s-1}。 \tag{2}$$

证明：

(i) 当证明(1) 时，我们可以假设 $R(s-1,t)$ 和 $R(s,t-1)$ 都是有限的。令 $n=R(s-1,t)+R(s,t-1)$，考虑 K_n 的一个红—蓝边着色。我们必须证明，这个着色或者包含一个红 K^s，或者包含一个蓝 K^t。令 x 是 K^n 的一个顶点。因为 $d(x)=n-1=R(s-1,t)+R(s,t-1)-1$，那么，或者至少存在 $n_1=R(s-1,t)$ 条红边与 x 关联，或者至少存在 $n_2=R(s,t-1)$ 条蓝边与 x 关联。依据对称性，我们可以假设第一种情形成立。考虑 K^n 的一个子图 $K^{n}{}_1$，它是以红边与 x 联结的 n_1 个顶点生成的子图。如果 $K^{n}{}_1$ 包含一个蓝 K^t，我们的证明结束。否则，$K^{n}{}_1$ 包含一个红 K^{s-1}，它与 x 一起构成一个红 K^s。

(ii) 如果 $s=2$ 或 $t=2$，不等式 (2) 成立（事实上，因为 $R(s,2)=R(2,s)=s$，我们有等号。）现在假设 $s>2$ 和 $t>2$，而且对于每对 (s',t')，$s',t'>2$，$s'+t'<s+t$，(2) 式都成立。则根据 (1) 式有

$$R(s,t)\leqslant R(s-1,t)+R(s,t-1)$$

$$\leqslant\binom{s+t-3}{s-2}+\binom{s+t-3}{s-1}=\binom{s+t-2}{s-1}。\quad\square$$

此结果容易推广到具有任意多种(但有限)颜色的着色。给定 k 和 $s_1,s_2,\cdots,s_k$，如果 n 充分大，则 K^n 用 k 种颜色的每个着色，对于某个 i，$1\leqslant i\leqslant k$，它包含一个具有第 i 种颜色的 K^{s_i}。(使这成立的 n 的最小值通常记作 $R_k(s_1,s_2,\cdots,s_k)$)。事实上，如果我们已知对于 k—1 种颜色上述断言成立，则在 K^n 的一个 k—着色中，我们用一种新颜色来代替前两种颜色。如果 n 是充分大的（依赖于 $s_1,s_2,\cdots,s_k$），则或者对于某个 $i(3\leqslant i\leqslant k)$ 存在具有第 i 种颜色的 K^{s_i}，或存在 K^m，$m=R(s_1,s_2)$，它用新颜色着色，即用（原来的）前两种颜色着色。在第一种情形中，我们的证明结束。而在第二种情形中，对于 $i=1$ 或 2，我们可以在 K^m 中找到一个具有第一种颜色的 K^{s_i}。

实际上，定理 1 也可以推广到超图，即推广到对有限集 X 的所有 r—元组的集 $X^{(r)}$ 的 k—着色。这是 Ramsey 证明的定理之一。

当 $|X|=n$ 时，令 $R^{(r)}(s,t)$ 是使 $X^{(r)}$ 的每一个红—蓝着色产生一个红 s—集或一个蓝 t—集的 n 的最小值。当然，如果

$Y \subset X$ 和$Y^{(r)}$的每个元素都是红（蓝）的，就称 Y 是红（蓝）的。注意，$R(s,t)=R^{(2)}(s,t)$。象在定理 1 中那样，下列结果不仅保证对所有的参数值 $R^{(r)}(s,t)$是有限的（这不是从一开始就很明显的），也给出了 $R^{(r)}(s,t)$的上界。这个定理的证明几乎就是定理 1 证明的翻版。注意，如果$r>\min\{s,t\}$，则 $R^{(r)}(s,t)=\min\{s,t\}$；如果 $r=s<t$，则 $R^{(r)}(s,t)=t$。

定理 2. 令 $1<r<\min\{s,t\}$，则 $R^{(r)}(s,t)$是有限的，并且

$$R^{(r)}(s,t)\leqslant R^{(r-1)}(R^{(r)}(s-1,t),R^{(r)}(s,t-1))+1。$$

证明： 如果对于所有的 u 和 v，$R^{(r-1)}(u,v)$是有限的，并且 $R^{(r)}(s-1,t)$和 $R^{(r)}(s,t-1)$也都是有限的，能证明此不等式，则两个断言就都证明了。

令X是有$R^{(r-1)}(R^{(r)}(s-1,t),R^{(r)}(s,t-1))+1$ 个元素的一个集。给定$X^{(r)}$的任意一个红一蓝着色，取 $x\in X$，定义 $Y=X-\{x\}$的所有$(r-1)$集的一个红一蓝着色如下：把$\sigma\in Y^{(r-1)}$着上$\{x\}\cup\sigma\in X^{(r)}$ 的颜色。依据函数 $R^{(r-1)}(u,v)$的定义，我们可以假设 Y 有一个具有 $R^{(r)}(s-1,t)$个元素的红子集 Z。

现在我们来看一看 $Z^{(r)}$的着色。如果它有一个蓝 t 一集，证明就结束，这是因为 $Z^{(r)}\subseteq X^{(r)}$，故Z的蓝 t 一集也是 X 的兰 t 一集 。另一方面，如果 Z 不包含蓝 t 一集，则存在红$(s-1)$一集，这时，它与$\{x\}$的并为 X 的红 s 一集。 □

在非平凡的 Ramsey 数中，只有很小一部分是已知的，甚至$r=2$ 的情况也是如此。显而易见，$R(3,3)=6$，通过一

些工作，我们能证明 $R(3,4)=9, R(3,5)=14, R(3,6)=18$, $R(3,7)=23$ 和 $R(4,4)=18$。由于(1)式，$R(s,t)$的任何一个上界对于给出每个 $R(s',t')$ $(s'\geqslant s, t'\geqslant t)$的上界都有帮助。$R(s,t)$的下界均不易得到。在第Ⅶ章中，我们将应用随机图的方法得到 Ramsey 数 $R(s,t)$的一些下界。

作为定理 2 的推论，我们看到，在自然数的各 r—元组的每个红—蓝着色中，都包含任意大的单色子集：如果一个子集的各 r—元组都有同样的颜色，就说该子集是**单色的**。实际上，Ramsey证明，可以找到无限单色子集。

定理3. 令 c: $A^{(r)}\longrightarrow\{1,2,\cdots,k\}$是一个无限集 A 的各 r 元组($1\leqslant r<\infty$)的一个 k 着色，则 A 包含单色无限集。

证明：我们使用对 r 的归纳法，注意，对于 $r=1$，结果是平凡的，故假设 $r>1$ 和对 r 的较小值定理成立。

记 $A_0=A$，取元素 $x_1\in A_0$。象在定理 2 的证明中那样，定义 $B_1=A_0-\{x_1\}$的各$(r-1)$—元组的一个着色 c_1: $B_1^{(r-1)}\longrightarrow\{1,2\cdots k\}$，使$c_1(\tau)=c(\tau\cup\{x_1\})$，$\tau\in B_1^{(r-1)}$。依归纳假设，$B_1$ 包含一个无限集 A_1，其所有$(r-1)$—元组有同样的颜色 d_1 $(d_1\in\{1,2,\cdots,k\})$。现在，令 $x_2\in A_1, B_2=A_1-\{x_2\}$，定义一个 k 着色 c_2: $B_2^{(r-1)}\longrightarrow\{1,2,\cdots,k\}$，使 $c_2(\tau)=c(\tau\cup\{x_2\})$，$\tau\in B_2^{(r-1)}$，则$B_2$ 包含一个无限集 A_2，其所有的$(r-1)$—元组有同样的颜色 d_2。把这一过程继续下去，我们得到一个元素的无穷序列 $x_1,x_2,\cdots$颜色的一个无穷序列 $d_1 d_2,\cdots$和集的一个递降序列 $A_0\supset A_1\supset A_2\supset\cdots$，使 $x_i\in A_{i-1}$，并且所有的 r —元组在 A_i 之外的唯一元素为 x_i，

它具有同样的颜色d_i。无穷序列$(d_n)_1^\infty$取k个值$1,2,\cdots,k$中至少一个无限次，比如说对每个i,$d_{n_i}=1$和$n_i\longrightarrow\infty$。则依其构造,无穷集$\{x_{n_1},x_{n_2},\cdots\}$的每个$r$元组都有颜色1。□

对某些情形，应用定理3的下面的说法更为方便（N是自然数集。）

定理3. 令$k_r\in N$，$r\in N$,并用k_r种颜色对N的各r元组的集$N^{(r)}$着色,则存在这样的无限子集$M\subset N$,对每个r，M的任意两个其最小元素至少为r的r—元组具有同样的颜色。

证明： 记$M_0=N$，假设已经选取了无限集$M_0\supset M_1\supset\cdots\supset M_{r-1}$，令$M_r$是$M_{r-1}$的一个无限子集，使$M_r$的所有$r$—元组都有同样的颜色。用这个方法,我们得到无限集的一个递降序列$M_0\supset M_1\supset\cdots$。取$a_1\in M_1$、$a_2\in M_2-\{1,2,\cdots,a_1\}$,$a_3\in M_3-\{1,2,\cdots,a_2\}$，等等。显然，$M=\{a_1,a_2,\cdots\}$有所要求的性质。□

综合定理2和定理1之后叙述的"着色—分组论证法"，或者综合定理3和某种紧致性论证[+]，就可得到下面的结果。给定r和$s_1,s_2,\cdots,s_k$，则对充分大的$|X|$，$X^{(r)}$的每一个用k种颜色着色都有这样的性质：对于某个i，$1\leqslant i\leqslant k$，存在一个集$S_i\subset X(|S_i|=s_i)$，其所有r—集有颜色i。使此成立的$|X|$的最小值用$R_k^{(r)}(s_1,s_2,\cdots,s_k)$表示。这样，$R^{(r)}(s,$

[+] 参看本章定理10.——校注.

$t) = R_2^{(r)}(s,t)$，而 $R_k(s_1,s_2,\cdots,s_k) = R_k^{(2)}(s_1,s_2,\cdots,s_k)$。定理 2 蕴含的 $R_k^{(r)}(s_1,s_2,\cdots,s_k)$ 的上界不是很好的。仿照定理 2 的证明，我们可以得到较好的上界（参看练习 8）：

$$R_k^{(r)}(s_1,s_2,\cdots s_k) \leqslant R_k^{(r-1)}(R_k^{(r)}(s_1-1,\ s_2,\cdots s_k),\cdots,$$
$$R_k^{(r)}(s_1,\cdots,s_{k-1},s_k-1))+1。$$

§2 单色子图

令 H_1 和 H_2 是任意两个图，给定自然数 n，是不是K^n边的每个红—蓝着色都是或者包含一个红 H_1 或包含一个蓝 H_2 呢？因为 H_i 是 K^{s_i} 的子图，此处 $s_i = |H_i|, i=1,2$，故当 $n \geqslant R(s_1,s_2)$时，回答显然是肯定的。用 $r(H_1,H_2)$ 表示保证肯定回答的 n 的最小值。注意这个记号类似于先前引入的记号：$R(s_1,s_2) = r(K^{s_1},K^{s_2})$。显然，$r(H_1,H_2)-1$ 是使得能存在满足 $H_1 \not\subset G$ 和 $H_2 \not\subset \overline{G}$ 的 n 阶图 G 的 n 的最大值。

有时，称数 $r(H_1,H_2)$为广义 Ramsey 数。近些年来，对它已经有相当广泛的研究。我们将对一些简单的图对(H_1,H_2)来确定$r(H_1,H_2)$。

定理 4. 令 T 是一个 t 阶树，则 $r(K^s,T) = (s-1)(t-1)+1$。

证明：图$(s-1)K^{t-1}$ 不包含 T，它的补 $K_{s-1}(t-1)$ 不包含 K^s，故 $r(K^s,T) \geqslant (s-1)(t-1)+1$。

现在，令 G 是一个$(s-1)(t-1)+1$阶图，其补不包含 K^s，则 $\chi(G) \geqslant \lceil n/(s-1) \rceil = t$，故它包含最小度至少为 $t-1$

的临界子图 H †（参看第Ⅴ章定理1）。显而易见，H 包含一个同构于 T 的子图。事实上，我们可以假设 $T_1 \subset H$，此处 $T_1 = T - x$，而 x 是 T 的一个端点，它邻接 T_1（和 H）的顶点 y。因为在 H 中，y 至少有 $t-1$ 个邻接顶点，这些邻接顶点中至少有一个，比如说 z，不属于 T_1，那么 H 的由 T_1 和 z 生成的子图显然是一个构于 T 的子图。 □

因为对 $r(K^s, K^t)$ 知道得很少，我们只期望当 G_1 和 G_2 都是稀疏（与其阶比较边数很少）的情形时，例如当 $G_1 = sH_1$ 和 $G_2 = tH_2$ 时，$r(G_1, G_2)$ 会比较容易计算。下面的简单引理表明，对于固定的 H_1 和 H_2，函数 $r(sH_1, tH_2)$ 的值至多为 $s|H_1| + t|H_2| + c$，此处 c 仅依赖 H_1 和 H_2，而不依赖 s 和 t。

引理 5. $r(G, H_1 \cup H_2) \leqslant \max\{r(G, H_1) + |H_2|, r(G, H_2)\}$，特别是，$r(sH_1, H_2) \leqslant r(H_1, H_2) + (s-1)|H_1|$。

证明：令 n 大于第一式的右边，并假设存在 K^n 的一个没有红 G 的红—蓝着色，则 $n \geqslant r(G, H_2)$ 蕴含存在蓝 H_2。将它去掉。因为 $n - |H_2| \geqslant r(G, H_1)$，故剩下的部分包含蓝 H_1。因此 K^n 包含蓝 $H_1 \cup H_2$。 □

定理 6. 如果 $s \geqslant t \geqslant 1$，则

$$r(sK^2, tK^2) = 2s + t - 1。$$

证明：图 $G = K^{2s-1} \cup E^{t-1}$ 不包含 s 条独立边，而 $\overline{G} =$

† 应为导出子图。——校注。

$E^{2s-1}+K^{t-1}$不包含t条独立边。因此，$r(sK^2,tK^2)\geqslant 2s+t-1$。

$r(sK^2,K^2)=2s$是平凡的。我们将证明

$$r((s+1)K^2,(t+1)K^2)\leqslant r(sK^2,tK^2)+3。$$

此不等式对于完成证明是足够了，这是因为由此可得

$$
\begin{aligned}
r((s+1)K^2,(t+1)K^2)&\leqslant r(sK^2,tK^2)+3\\
&\leqslant r((s-1)K^2,(t-1)K^2)+6\\
&\leqslant r((s-t+1)K^2,K^2)+3t=2(s-t+1)+3t\\
&=2s+t+2。
\end{aligned}
$$

令G是一个$n=r(sK^2,tK^2)+3\geqslant 2s+t+1$阶图。如果$G=K^n$，则$G\supset(s+1)K^2$；如果$G=E^n$，则$\overline{G}\supset(t+1)K^2$。否则，存在三个顶点$x$、$y$和$z$，使$xy\in G$，$xz\notin G$。现在，或者$G-\{x,y,z\}$包含$s$条独立边，这时$xy$可以添加到它们之中，构成$G$的$s+1$条独立边；或者$\overline{G}-\{x,y,z\}$包含$t$条独立边，这时$xz$可以添加到它们之中，构成$\overline{G}$的$t+1$条独立边。 □

定理7. 如果$s\geqslant t\geqslant 1$和$s\geqslant 2$，则

$$r(sK^3,tK^3)=3s+2t。$$

证明： 令$G=K^{3s-1}\cup(K^1+E^{2t-1})$，则$G$不包含$s$个独立的三角形[†]，而$\overline{G}=E^{3s-1}+(K^1\cup K^{2t-1})$不包含$t$个独立的三角形，因此，$r(sK^3,tK^3)$不小于所要证的值。

很容易证明，$r(2K^3,K^3)=8$和$r(2K^3,2K^3)=10$（练习12）。因此，反复应用引理5就给出

† 指没有公共顶点的一组三角形。——校注

$$r(sK^3, K^3) \leqslant 3s,$$

而只要对于 $s \geqslant 1, t \geqslant 1$，我们能证明

$$r((s+1)K^3, (t+1)K^3) \leqslant r(sK^3, tK^3) + 5。$$

就完成了证明。

为了看清这一点，令 $n = r(sK^3, tK^3) + 5$，并考虑 K^n 的一个红一蓝着色。在 K^n 中取一个单色的（比如说是红的）三角形 K_r。如果 $K^n - K_r$ 包含一个红 sK^3，证明结束。否则，$K^n - K_r$ 包含一个蓝三角形 K_b（它甚至还包含兰 tK^3）。我们可以假设 K_r—K_b 的九条边中至少有五条是红的。这些边中至少有两条与 K_b 的一个顶点关联，而它们同 K_r 的一条边一起构成一个红三角形 K_r^*，此三角形与 K_b 有一个公共顶点。因为 $K^n - K_r^* - K_b$ 有 $r(sK^3, tK^3)$ 个顶点，它或者包含一个红 sK^3 或者包含一个蓝 tK^3。它们与 K_r^* 和 K_b 都没有公共顶点，故 K^n 或包含一个红 $(s+1)K^3$，或包含一个蓝 $(t+1)K^3$。

仔细推敲前面两个定理证明的思路，我们可以在 $\max(s,t)$ 比 $\max(p,q)$ 大很多时，得到 $r(sK^p, tK^q)$ 的一些较好的界。令 $p、q \geqslant 2$ 是固定的，选取 t_0，使

$$t_0 \min\{p,q\} \geqslant 2r(K^p, K^q)。$$

记 $C = r(t_0K^p, t_0K^q)$ 。

定理 8. 如果 $s \geqslant t \geqslant 1$，则

$$ps + (q-1)t - 1 \leqslant r(sK^p, tK^q) \leqslant ps + (q-1)t + C。$$

证明： 图 $K^{ps-1} \cup E^{(q-1)t-1}$ 证明了第一个不等式。象在

前面各定理证明中那样，我们固定 $s-t$，并应用对 t 的归纳法。依引理 5，当 $t\leqslant t_0$ 时有

$$r(sK^p,tK^q)\leqslant(s-t)p+r(tK^p,tK^q)\leqslant ps+C。$$

现在假设 $t\geqslant t_0$，并且定理中第二个不等式对于 s,t 成立。

令 G 是 $n=p(s+1)+(q-1)(t+1)+C+1$ 阶图，使 $G\not\supset(s+1)K^p$ 和 $\overline{G}\not\supset(t+1)K^q$。假设任何一对 G 中的 K^p 和 $\overline{G}$ 中的 K^q 均没有公共顶点。用 V_p 表示 G 的各 K^p 子图中顶点的集，并记 $V_q=V-V_p$，$n_p=|V_p|$，$n_q=|V_q|$。任何顶点 $x\in V_q$ 均不能与 V_p 的多于 $r(K^{p-1},K^q)$ 个顶点联结，这是因为否则的话，或 G 中存在一个 K^p 包含 x，或 $\overline{G}$ 中存在一个 K^q 包含 V_p 的顶点。与此类似，每个顶点 $y\in V^q$ 联结于 V_p 的至多除去 $r(K^p,K^{q-1})$ 个顶点之外的全部顶点。因此，

$$n_qr(K^{p-1},K^q)+n_pr(K^p,K^{q-1})\geqslant n_pn_q。$$

但是，这是不可能的，因为 $n_p\geqslant sp,n_q\geqslant tq$，故 $n_p>2r(K^{p-1},K^q)$ 和 $n_q>2r(K^p,K^{q-1})$。因此，我们可以找到 G 中的一个 K^p 和 $\overline{G}$ 中的一个 K^q，它们有一个公共顶点。

当我们去掉这些子图的 $p+q-1$ 个顶点时，发现剩下的部分 H 满足 $H\not\supset sK^p$ 和 $\overline{H}\not\supset tK^q$.但是，$|H|=ps+(q-1)t+C+1$，而这是不可能的。 □

我们会想，各种各样的 Ramsey 定理成立是由于我们对其进行边着色的图是 K^n，而不是只有少数边的稀疏图。

现在我们考虑对于有限图的原来 Ramsey 定理的另外一个推广。令 $H,G_1,G_2,\cdots,G_k$ 都是图，用

$$H\longrightarrow(G_1,G_2,\cdots,G_k)$$

表示下面的陈述：对 H 的边用颜色 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 的每种着色，存在这样一个下标 i，使 H 包含同构于 G_i 的子图，其边都具有颜色 c_i。如果对于每个 i，$G_i = G$，通常把 $H \to (G_1, G_2, \cdots, G_k)$ 写成 $H \to (G)_k$。注意
$r(G_1, G_2) = \min\{n: K^{n+1} \to (G_1, G_2)\} = \max\{n: K^n \nrightarrow (G_1, G_2)\}$。†

显然，在一个稀疏图中寻求单色子图比在完全图中更困难，并且对于给定的图 G_1 和 G_2，可能不容易找到一个在某种给定意义下的稀疏图 H，使 $H \to (G_1, G_2.)$，因此我们可能不会立即找到没有 K^6 的一个稀疏图 H，使 $H \to (K^3, K^3)$，（这样的一个图示与图 Ⅵ.1 中）。我们可以进一步提出下面的困难问题：存在 $cl(H) = 3$（故没有 K^4）且 $H \to (K^3, K^3)$ 的图 H 吗？注意，定理 1 并不能保证这样的图 H 存在。为了结束这一节，我们仅陈述深刻的 Nešetřil 和 Rödl 定理，它表明，对这类问题的回答是肯定的。

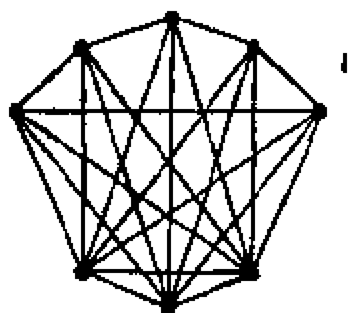


图 Ⅵ.1. 图 $G^3 + G^5$.

定理 9. 给定 $G_1, G_2, \cdots, G_k$，存在图 H，使得 $\mathrm{cl}(H) = \max\limits_{1 \le i \le k} \mathrm{cl}(G_i)$ 和 $H \to (G_1, G_2, \cdots, G_k)$.

§3 代数和几何中的 Ramsey 定理

给定一个代数的或几何的对象和这个对象的有限子

† 应为 $r(G_1, G_2) = \min\{n: K^n \to (G_1, G_2)\} = \max\{n: K^{n-1} \nrightarrow (G_1, G_2)\}$. ——校注.

集的一个类 $\mathbf{P}$。当我们用 k 种颜色对这些元素着色（即把这些元素划分成 k 类）时，是不是这些颜色类中总是至少有一个类包含 $\mathbf{P}$ 的至少一个元素呢？在这一节中，我们对欧几里得空间、有限维向量空间、各种半群和属于更一般范畴的对象，讨论一些这种类型的问题。我们只证明一、二个简单结果，因为一些较深刻结果的证明远远超出本书的范围，尽管那些命题本身是很容易理解的。

令 $\mathbf{P}$ 是集 M 的有限子集的一个类.用前节中使用的记号，$M\to(\mathbf{P})_k$ 表示在 M 的每个 k—着色中都存在单色集 $P\in\mathbf{P}$，即当 $M=M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_k$,则对某个 $i\in[1,k]=\{1,2,\cdots,k\}$ 和某个 $P\in\mathbf{P}$ 有 $P\subset M_i$。当讨论 $M\to(\mathbf{P})_k$ 是否成立时，下列的紧致性定理能使我们用 M 的有限子集来代替 M。

定理 10 $M\to(\mathbf{P})_k$ 当且仅当存在有限子集 $X\subset M$，使 $X\to(\mathbf{P})_k$。

证明：如果 $M\not\to(\mathbf{P})_k$，则对每个有限集 $X\subset M$，显然有 $X\not\to(\mathbf{P})_k$。

M 的一个 k 着色是空间 $[1, k]^M$ 中的一个点；对于 $c\in[1,k]^M$ 和 $x\in M$，c 在分量 x 上的投影 $\pi_x(c)$ 就是 $c(x)\in[1,k]=\{1,2,\cdots,k\}$，$c(x)$ 是由 c 对 x 指定的颜色。我们几乎总是给 $[1,k]$ 以离散拓扑，而给 $[1,k]^M$ 以乘积拓扑。根据一般拓扑中熟知的 Tychonov 定理，空间 $[1,k]^M$ 是紧致的，因为它是紧致空间的乘积。

给定一个有限集 $X\subset M$，令 $N(X)$ 是所有这样着色的集，在这些着色中 X 不包含单色集 $P\in\mathbf{P}$。如果 $c\notin N(X)$，

而$d\in[1,k]^M$与c在X上相等（即$d|X=c|X$），则$d\notin N(X)$。因此，$[1,k]^M-N(X)$是开的，故$N(X)$是闭的。（实际上，$N(X)$是平凡既开又闭的。）

现在，我们可以来证明必要性了。假设对每个有限集$X\subset M$都有$X\nrightarrow(\mathbf{P})_k$，这就表示对每个有限集$X$有$N(X)\neq\phi$。因为$N(X)\cap N(Y)\supseteq N(X\cup Y)$，闭集系$\{N(X):X\subset M$是有限的$\}$有有限交性质。$[1,k]^M$的紧致性蕴含$\bigcap_X N(X)\neq\phi$。每个$c\in\bigcap_X N(X)$是$M$的一个不包含单色集$P\in\mathbf{P}$的$k$—着色。 □

令L是n维欧几里得空间$\mathbf{R}^n$中点的一个有限集。作为迄今使用的记号的另一个变形，$\mathbf{R}^n\rightarrow(L)_k$表示在$\mathbf{R}^n$的每个$k$—着色中都存在全等于$L$的单色$L'$。如果对于每个$k$都存在这样的$n$，使$\mathbf{R}^n\rightarrow(L)_k$，则说$L$是一个Ramsey**集**。

定理 11. 令P是距离为1的一对点，则

$$\mathbf{R}^2\longrightarrow(P)_3,$$

但

$$\mathbf{R}^2\not\longrightarrow(P)_7。$$

证明： 图 Ⅵ.2 证明了第一个断言，理由如下：假设在此图的7个点的红—蓝—黄着色中，不存在单色的邻接点对。不妨假设x是红的，则y_1和z_1是蓝的和黄的，故x_1是红的。同样，x_2是红的，但是，x_1和x_2是邻接的。

图 Ⅵ.3 说明了$\mathbf{R}^2\rightarrow(P)_7$不成立。 □

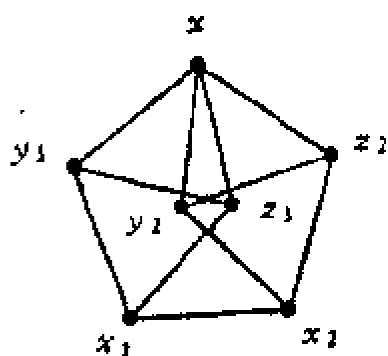


图 Ⅶ.2. 每对邻接点的距离均为 1.

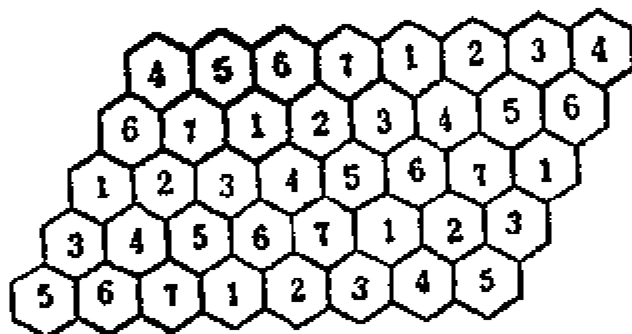


图 Ⅶ.3. 边长为a的一些六边形，$\frac{1}{2}<a<(4\sqrt{5}-5)/10$.

有趣的是，还不知道使 $\mathbf{R}^2\to(P)_k$ 的 k 的最大值。

定理 12. 令 Q^2 是单位正方形（的顶点集），则 $\mathbf{R}^6\to(Q^2)_2$。

证明. 考虑 $\mathbf{R}^6$ 的一个红—蓝着色。特别是有 $\mathbf{R}^6$的下面十五个点的红—蓝着色：$x_{ij}=(x^1_{ij},\cdots,x^6_{ij})$，$1\leqslant i<j\leqslant 6$，其中 $x^k_{ij}=0$ 除非 $k=i$ 或 $k=j$，而$x^i_{ij}=x^j_{ij}=1/\sqrt{2}$。考虑具有顶点集 $\{v_1,\cdots,v_6\}$ 的 K^6，并用 x_{ij}的颜色对边 v_iv_j 着色（$i<j$）。因为 $r(C^4,C^4)=6$（此证明不难，留给读者作为练习 13），依对称性，我们可以假设边 v_1v_2、v_2v_3、v_3v_4 全是红的。容易验证点 x_{12},x_{23},x_{34} 和 x_{14} 构成一个单位正方形，而这个正方形当然是红的。 □

给定 $L_1\subset\mathbf{R}^{m_1}$ 和 $L_2\subset\mathbf{R}^{m_2}$，我们定义 $L_1\times L_2\subset\mathbf{R}^{m_1+m_2}$ 为：

$$L_1\times L_2=\{(x_1,\cdots,x_{m_1+m_2}):(x_1,\cdots x_{m_1})\in L_1,\ (x_{m_1+1},\cdots,x_{m_1+m_2})\in L_2\}。$$

定理 13. 如果 L_1 和 L_2 都是 Ramsey 集，则 $L_1\times L_2$ 也是 Ramsey 集。

证明：给定 k，存在 m，使 $\mathbf{R}^m\to(L_1)_k$。因此，依紧致性定理，存在一个有限子集 $X\subset\mathbf{R}^m$，使 $X\to(L_1)_k$。记 $l=k^{|X|}$。因为 L_2 是 Ramsey 集，存在 n，使 $\mathbf{R}^n\to(L_2)_l$。$\mathbf{R}^{m+n}=\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n$ 的每个 k—着色限定一个 k—着色 c：$X\times\mathbf{R}^n\to[1,k]=\{1,2,\cdots,k\}$。这给出 $\mathbf{R}^n$ 的用颜色 $[1,k]^X$ 的一个 $l=k^{|X|}$—着色：对 $y_0\in\mathbf{R}^n$，只要用 $f\in[1,k]^X$ 去对它着色即可，其中 f 是给出 $X\times\{y_0\}$ 的着色的一个函数：$f(y_0)=c(x,y_0)$。在这个 l—着色中，存在一个单色的 $L_2\subset\mathbf{R}^n$，即 $L_2\subset\mathbf{R}^n$，对于 $x\in X$ 和 $y_1,y_2\in L_2$，点 (x,y_1)，(x,y_2) 有同样的颜色（在原来的 k—着色中）。对 x 指定这一共同的颜色，我们得到 X 的一个 k—着色。它有单色的 $L_1\subset X$，这就给出了一个单色的 $L_1\times L_2$。 □

在 $\mathbf{R}^n$ 中的一块砖是全等于

$$B=\{(\varepsilon_1a_1,\varepsilon_2a_2,\cdots,\varepsilon_na_n):\varepsilon_i=0\text{ 或 }1\}$$

的一个集，此处 $a_i>0$。$\mathbf{R}^k$ 中的单位单形表明，$\mathbf{R}^k\to(\{0,1\})_k$，故每个 2—点集是 Ramsey 集。因此，定理 13 有下面的推论。

定理 14. 一块砖的每个子集都是 Ramsey 集。 □

如果一个集 $L\subset\mathbf{R}^m$ 可嵌入某个（任意维数和任意半径的）环面上，就称 L 是**球面的**。稍麻烦一些但可以证明，如

果一个集不是球面的，则它不是 Ramsey 集（练习20）。更奇怪的是，尽管存在许多集（还有许多很简单的集，例如钝角三角形[†]），它们是球面的，但不是砖的子集，然而它们之中的任何一个是不是 Ramsey 集都还不清楚。

Ramsey 定理的下列很有意义的推广是由 Hales 和 Jewett 证明的。

定理 15. 令 S 是一个可换无限半群，令 L 是 S 的一个有限子集，且令 $\mathbf{P}=\{a+nL: a\in S, n\in N\}$，此处 $nL=\{nx: x\in L\}$，则对每个 k 有

$$S \longrightarrow (\mathbf{P})_k。$$ □

这个定理的证明难以在这里介绍，但是，我们陈述了这个定理，一方面因为它是 Graham，Leeb 和 Rothschild 所证明的一些很一般的结果的基础，这些结果断言某些范畴是"Ramsey"的；另一方面因为我们将要证明这一定理的一个特殊情形。下一个定理是 Rota 猜想的，它是关于 Ramsey 范畴的那些结果的更精彩的推论之一。

定理 16. 给定一个有限域 F 和两个自然数 n 和 k，存在这样一个自然数 N，使得当对 F 上的 N—维向量空间 F^N 用 k 种颜色着色，则 F^N 包含一个单色的 n—维仿射子空间。

并且，给定一个有限域 F 和三个自然数 n，m 和 k，存在这样的 M，使得当 F^M 的 k—维子空间的集用 k 种颜色着

† 指它的三个顶点构成的集。——校注。

色，则存在一个 n—维子空间，其中所有 k—维子空间有同样的颜色。 □

Van der Waerden 的经典定理（下面的定理 17）是定理 15的一种特殊情形。此处我们介绍这个定理及由Graham 和 Rothschild 给出的证明，因为这个证明反映了用于该理论中最深刻的结果的论证的风味。按惯例，把自然数集记作 N，把集$\{m,m+1,\cdots,n\}$ 记作 $[m,n]$。

定理 17. 给定 $p,k\in N$，存在这样的整数$W(p,k)$，使在$[1,W(p,k)]$的任何 k—着色中，都存在由 p 项组成的单色算术级数。

证明： 令 l 和 m 是两个自然数。如果两个 m—元组$(x_1,x_2,\cdots,x_m),(y_1,y_2,\cdots,y_m)\in[0,l]^{m}$ 一直到、并且包含最后一次出现的 l 都是一致的，就称这两个 m—元组是 **l—等价的**；并约定任何两个不包含 l 的序列是等价的。我们把下面的陈述记作 $S(l,m)$：

给定 $k\in N$，存在这样的 $W(l,m,k)$，对于每个函数

$$c:[1,W(L,m,k)]\to[1,k]$$

存在 $a,d_1,d_2,\cdots,d_m\in N$，使

$$a+L\sum_{i=1}^{m}d_i\leqslant W(l,m,k),$$

且在$[0,l]^{(m)}$ 的每个 l—等价类上，

$$c(a+\sum_{1}^{m}x_id_i)$$

是常数 。

注意 Van der Waerden 定理就是断言$S(p,1)$，但是，对每个 p 成立的这个定理等价于对每个 l 和 m，$S(l,m)$ 成立。我们将用归纳法，从平凡的断言 $S(1,1)$ 开始，并通过两种不同的归纳步骤证明 $S(l,m)$。

(i) 如果对某个 $m\geqslant 1$，$S(l,m)$ 成立，则 $S(l,m+1)$ 也成立。为了看清这一点，固定 k，记 $W=W(l,m,k)$，$W'=W(l,1,k^W)$ 和 $W_j=[(j-1)W+1,jW]$，$1\leqslant j\leqslant W'$。令 c $[1,WW']\to[1,k]$ 是任意一个 k—着色。这导出一个$[1,W']$的一个 k^W—着色 c'，它用描述 W_j 着色法的函数 $f\in[1,k]^{[1,W]}$对 $j\in[1,W]$着色：$f(w)=c((j-1)W+w)$，$1\leqslant w\leqslant W$（参看定理 3 的证明）。依据 W' 的选法，存在这样的 a' 和d'，$a'+ld'\leqslant W'$，使 $c'(a')=c'(a'+d')=c'(a'+(l-1)d')$。我们把 $S(l,m)$应用于以 c 作了 k—着色的区间$[(a'-1)W+1,a'W]$，则存在这样的 $a,d_1,\cdots,d_m\in N$，使

$$(a'-1)W+1\leqslant a\leqslant a+l\sum_1^m d_i\leqslant a'W,$$

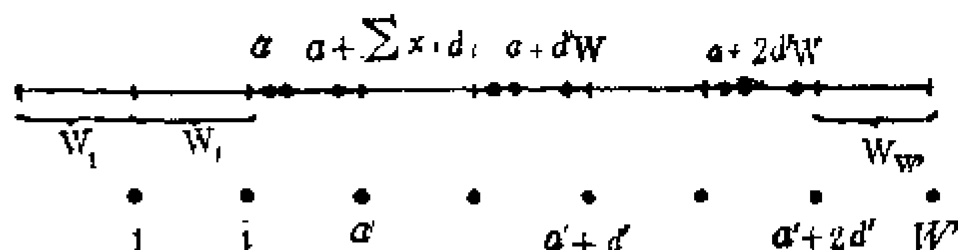
而 $c(a+\sum_1^m x_i d_i)$ 在各 l—等价类上是常数。记 $d_{m+1}=d'W$，则 $a,d_1,\cdots,d_{m+1}$ 满足

$$a+l\sum_1^{m+1}d_i\leqslant WW',$$

而

$$c(a+\sum_1^m x_i d_i)$$

在$[0,l]^{m+1}$的每个 l—等价类上是常数（见图Ⅵ.4.）。



图Ⅷ.4. 部分(i)的图解，对$j\in[1,W']$着色告诉我们如何对W_j着色

(ii) 如果对每个l，$S(l,m)$成立，则$S(l+1,m)$也成立。这几乎是抽斗原则直接的推论。因为令$c:[1,W(l,k,k)]\to[1,k]$是给定的，则存在这样的$a,d_1,\cdots,d_k\in N$，使$a+l\sum_1^k d_i\leqslant W(l,k,k)$，而$c(a+\sum_1^k x_i d_i)$在各$l$—等价类上是常数。各种颜色$c(a+\sum_1^s ld_i)$，$s=0,1,2,\cdots k$，不能完全不同，故存在$s,t,0\leqslant s<t\leqslant k$，使

$$c(a+\sum_1^s ld_i)=c(a+\sum_1^t ld_i)。$$

于是对$j\in[0,j]$，

$$c\ ((a+\sum_1^s ld_i)+j\sum_{s+1}^t d_i)$$

是常数。

因为$s(1,1)$是平凡的，依归纳假设，对于每个l和m，$S(l,m)$成立。 □

Wan der Waerden 定理有许多有趣而深刻的推广。其中，Rado 确定了在 N 的每个用有限多种颜色的着色中，整系数线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, i = 1, 2, \cdots, m$$

什么时候有单色的解。作为 Rado 定理和紧致性定理的一种特殊情形，我们得到下面的结果：给定整数 k 和 n，存在这样的 $N = N(k,n)$，使得如果 $[1,N]$ 被 k—着色，则存在一个由 n 个自然数组成的集 A，使 $\sum_{a\in A} a \leqslant N$，且所有的和 $\sum_{b\in B} b$，$\phi \neq B \subset A$，有同样的颜色。在下一节的末尾，我们讨论这个结果对无限集的一个很好的推广。

§4 子 序 列[‡]

令 (f_n) 是一个空间 T 上一些函数的一个序列，则我们可以找到这样一个子序列 $(f_{n'})$，使下面两个结论之一成立。

a. 如果 $(f_{n'_i})$ 是 $(f_{n'})$ 的任意一个子序列，则对每个 $N \geqslant 1$，有 $\sup\left|\sum_{1}^{N} f_{n'_i}\right| \geqslant 1/N$。

b. 如果 $(f_{n'_i})$ 是 $(f_{n'})$ 的任意一个子序列，则对某个 $N \geqslant 1$，有 $\sup\left|\sum_{1}^{N} f_{n'_i}\right| < 1/N$。

关于函数序列的这个相当困难的断言，实际上是关于无穷集的一个 Ramsey 型结果的一个直接推论。

‡ 原书在这一节中有多处记号印刷有错误，现尽量改正。——校注。

通常 2^M 表示 M 的所有子集的集，$M^{(r)}$ 是 M 的所有 r—元组的集，$M^{(\omega)}$ 表示 M 的所有可数无限子集的集。N 是自然数集，而 $[1,n]=\{1,2,\cdots,n\}$。一个类 $\mathsf{F}\subset 2^N$ 称为一个 Ramsey 类当且仅当存在这样的 $M\in N^{(\omega)}$，使得或 $M^{(\omega)}\subset\mathsf{F}$，或 $M^{(\omega)}\subset 2^N-\mathsf{F}$。

当然，2^N 可以等同于笛卡尔乘积 $\prod_{n\in N}T_n$，此处 $T_n=\{0,1\}$。我们给 T_n 以离散拓扑和 2^N 以乘积拓扑。在这个拓扑中，2^N 是一个紧致的豪斯道夫空间。属于 Galvin 和 Prikry 的一个定理一种弱形式表明，2^N 的每个开子集都是 Ramsey 集。(显而易见，这个结果蕴含上述关于函数序列的断言。)为了证明这个结果，使用 Galvin 和 Prikry 引入的记号和术语是方便的。M,N,A 和 B 都是 N 的无限子集，X,Y 都是 N 的有限子集。$X<a$ 表示对于每个 $x\in X$，有 $x<a$；$X<M$ 表示对每个 $m\in M$，$X<m$。X 的一个 M—**扩张**是一个形如 $X\cup N$ 的集，此处 $X<N$ 且 $N\subset M$。现在，我们取定一个类 $\mathsf{F}\subset 2^N$。如果 X 的每个 M—扩张都属于 F，则说 M **接受** X；如果不存在接受 X 的 $N\subset M$，就说 M **拒绝** X。

引理 18. 如果 N 拒绝 ϕ，则存在 $M\in N^{(\omega)}$，M 拒绝每个 $X\subset M$。

证明： 首先注意，存在这样的 M_0，每个 $X\subset M_0$ 或被 M_0 接受，或被 M_0 拒绝。事实上，记 $N_0=N$，$a_0=1$。假设我们已经确定了 $N_0\supset N_1\supset\cdots\supset N_k$ 和 $a_i\in N_i-N_{i+1}$，$0\leqslant i\leqslant k-1$。取 $a_k\in N_k$。如果 $N_k-\{a_k\}$ 拒绝 $\{a_0,\cdots,a_k\}$，则记 $N_{k+1}=N_k-\{a_k\}$；否则，令 N_{k+1} 是 $N_k-\{a_k\}$ 的接受 $\{a_0,$

$a_1,\cdots,a_k\}$的一个无限子集。则 $M_0=\{a_0,a_1,\cdots\}$就是本段所要求的子集。

依归纳假设，M_0拒绝 ϕ。现在假设我们已经选取了 b_0，$b_1,\cdots,b_{k-1}$，使 M_0 拒绝每个 $X\subset\{b_0,b_1,\cdots,b_{k-1}\}$。则 M_0 不能接受无限多个形如 $X\cup\{c_j\}$，$j=1,2,\cdots$的集，因为否则的话，$\{c_1,c_2,\cdots\}$接受 X。因此，M_0拒绝除了有限多个形如 $X\cup\{c\}$的之外的所有集。因为对于 X 仅存在 2^k种取法，有这样的 b_k，M_0拒绝每个 $X\subset\{b_0, b_1,\cdots b_k\}$。依据构造，集$M=\{b_0,b_1,\cdots\}$有所要求的性质。 □

定理 19. 2^N 的每个开子集都是 Ramsey 集。

证明: 令 $\mathbf{F}\subset 2^N$ 是开的，并假设对于每个 $A\in N^{(\omega)}$ 有 $A^{(\omega)}\not\subset\mathbf{F}$，即 N 拒绝 ϕ。令 M 是由引理 18 保证其存在的集。如果 $M^{(\omega)}\not\subset 2^N-\mathbf{F}$，令 $A\in M^{(\omega)}\cap\mathbf{F}$。因为 $\mathbf{F}$ 是开的，它包含 A 的一个邻域，故存在这样的整数 $a\in A$，使得如果$B\cap\{1,2,\cdots,a\}=A\cap\{1,2,\cdots,a\}$，则 $B\in\mathbf{F}$。但是，这蕴含 M 接受 $A\cap\{1,2,\cdots,a\}$，与 M 的取法矛盾。因此，$M^{(\omega)}\subset 2^N-\mathbf{F}$，这就证明了 $\mathbf{F}$ 是 Ramsey 类。 □

用 $X^{(<\omega)}$，表示 X 的所有有限子集的类。一个类 $\mathbf{F}_0\subset N^{(<\omega)}$称为**稠密的**，如果对于每个 $M\in N^{(\omega)}$，$\mathbf{F}_0\cap M^{(<\omega)}\neq\phi$。$\mathbf{F}_0$称为**稀疏的**，如果 $\mathbf{F}_0$中没有一个元素是另一个元素的初始段（也就是说，如果 $X<Y$ 蕴含 $X\notin\mathbf{F}_0$ 或 $X\cup Y\notin\mathbf{F}_0$）。

推论20. 令 $\mathsf{F}_0 \subset N^{(\omega)}$ 是稠密的，则存在这样的 $M \in N^{(\omega)}$，使每个 $A \subset M$ 都有属于 F_0 的初始段。

证明： 令 $\mathsf{F} = \{F \subset N: F$ 有属于 F_0 的初始段$\}$。则 F 是开的，故存在这样的 $M \in N^{(\omega)}$，使得或 $M^{(\omega)} \subset \mathsf{F}$，或 $M^{(\omega)} \subset 2^N - \mathsf{F}$。第一种情样证明结束，而第二种情形不能成立，因为这蕴含 $M^{(\omega)} \cap \mathsf{F}_0 = \phi$。 □

这个推论能使我们导出对无限集的原来 Ramsey 定理（定理 3）的一个推广。

推论 21. 令 $\mathsf{F}_0 \subset N^{(<\omega)}$ 是稀疏的，则对 F_0 的任意一个 k—着色，都存在这样的无限集 $A \subset N$，使 F_0 的所有包含在 A 中的元素都有同样的颜色。

证明： 只要对 $k=2$ 证明这一结果就够了。考虑 F_0 的一个红一蓝着色：$\mathsf{F}_0 = \mathsf{F}_{红} \cup \mathsf{F}_{蓝}$。如果 $\mathsf{F}_{红}$ 是稠密的，则令 M 是由**推论** 20 保证的集。对于每个 $F \in \mathsf{F}_0 \cap 2^M$，存在具有初始段 F 的无限集 $N \subset M$。因为 F_0 是稀疏的，F 是 N 的属于 F_0 的唯一的初始段。因此 $F \in \mathsf{F}_{红}$，故 F_0 的包含在 M 中的每个元素都是红的。

另一方面，如果 $\mathsf{F}_{红}$ 不是稠密的，则对某个无限集 M，$2^M \cap \mathsf{F}_{红} = \phi$。因此 $2^M \cap \mathsf{F}_0 \subset \mathsf{F}_{蓝}$。 □

现在，我们转向前一节末尾曾许诺的关于单色和的结果。这个很好的结果是由 Graham 和 Rothschild 猜想，由 Hindman 首先证明的，它与这一节中给出的结果不很接近，但是，由 Glazer 给出的奇妙的证明揭示出一个可用于无限

Ramsey 理论的富有成效的方法。

定理 22. 对于 N 的任何一个 k—着色，都存在这样的无限集 $A\subset N$，使所有的和 $\sum_{x\in X} x$，$\phi\neq X\subset A$，都有同样的颜色。 □

我们不准备给出详细的证明，仅对那些（至少是模模糊糊地）熟悉 N 上的超滤子，并知道所有超滤子的集 βN 是一个紧致拓扑空间（具有当然是离散拓扑的 N 的 Stone-Cech 紧致化）的读者给出证明的概要。Glazer 所给出的这个证明至少与定理本身一样绝妙，而且更加使人惊奇。

我们回忆一下，N 上的**滤子** $\mathbf{F}$ 是 N 的这样一个子集族：(i)如果 $A,B\in\mathbf{F}$，则 $A\cap B\in\mathbf{F}$；(ii)如果 $A\in\mathbf{F}$ 和 $A\subset B$，则 $B\in\mathbf{F}$；(iii)$\mathbf{F}\neq 2^N$，即 $\phi\notin\mathbf{F}$。Zorn 引理蕴含：每个滤子包含在一个极大滤子中。一个极大滤子称为一个**超滤子**。如果 $\mathbf{U}$ 是一个超滤子，则对于每个 $A\subset N$，或者 $A\in\mathbf{U}$，或者 $N-A\in\mathbf{U}$。这蕴含：每个超滤子在 2^N 上定义一个有限可加的 0——1 测度 m：

$$m(A)=\begin{cases}1 & \text{如果 } N\in\mathbf{U},\\ 0 & \text{如果 } N-A\in\mathbf{U}。\end{cases}$$

反之，2^N 上的每个有限可加的 0—1 测度显然定义一个超滤子。如果存在一个测度为 1 的有限集，则这个集的元素之一，比如说 a，也有测度 1，故 $U=\{A\subset N;\ a\in A\}$。这样的超滤子称为**主要的**。并不是每个超滤子都是主要的：包含滤子 $\mathbf{F}=\{A\subset N;\ N-A$ 是有限的$\}$的超滤子不是主要的。

从下列对定理3中情形 $r=2$ 的很简单的证明可以看出，在证明各种 Ramsey 定理时哪些超滤子可能是有用的。令 U 是一个非主要的超滤子，且令 $\mathbf{N}^{(2)}=P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_k$。对于 $n\in\mathbf{N}$，令 $A_i^{(n)}=\{m:(n,m)\in P_i\}$。则这些集 $A_1^{(n)},A_2^{(n)},\cdots,A_k^{(n)}$ 中恰有一个，比如说集 $A_{c(n)}^{(n)}$ 属于 U。现在，对于 $B_i=\{n:c(n)=i\}$，有 $\mathbf{N}=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_k$，故这些集中也恰有一个，比如说 B_j，属于 U。最后，取 $a_1\in B_j$，$a_2\in B_j\cap A_j^{(a_1)}$，$a_3\in B_j\cap A_j^{(a_1)}\cap A_j^{(a_2)}$，等等。对于 $A=\{a_1,a_2\cdots\}$，我们有 $A^{(2)}\subset P_j$。

最后，我们来说明 Glazer 的定理22的证明的概要。我们在 $\beta\mathbf{N}$ 上定义加法：

$$U+\mathbf{V}=\{A\subset N:\{n\in\mathbf{N}:A-n\in U\}\in\mathbf{V}\},$$

此处 $U,\mathbf{V}\in\beta\mathbf{N}$ 和 $A-n=\{a-n:a\in A,a>n\}$。

通过一些努力便可验证，$U+\mathbf{V}$ 确实是一个超滤子，而对于这个加法 $\beta\mathbf{N}$ 成为一个半群。并且，这个半群运算是右连续的，即对固定的 $\mathbf{P}\in\beta\mathbf{N}$，由 $U\to\mathbf{P}+U$ 给定的映射是连续的。应用一种简短而又标准的拓扑论证，我们看出上述性质蕴含 $\beta\mathbf{N}$ 有幂等元，即存在具有性质 $\mathbf{P}+\mathbf{P}=\mathbf{P}$ 的元 $\mathbf{P}$。这个 $\mathbf{P}$ 是非主要的，这是因为若 $\{p\}\in\mathbf{P}$，则 $\{2p\}\in\mathbf{P}+\mathbf{P}$，故 $\{p\}\notin\mathbf{P}+\mathbf{P}$。

现在令 $A\in\mathbf{P}$，则依加法的定义有

$$A^*=\{n\in\mathbf{N}:A-n\in\mathbf{P}\}\in\mathbf{P}。$$

这样，如果 $a\in A\cap A^*$，则 $B=(A-a)\cap(A-\{a\})\in\mathbf{P}$。（因为 $\mathbf{P}$ 不是主要的，我们可以用 $A-\{a\}$ 来代替 A）。因此，对于每个 $A\in\mathbf{P}$，存在 $a\in A$ 和 $B\subset A-\{a\}$，使得 $B\in\mathbf{P}$ 和

$a+B\subset A$。

当然，这个超滤子与 **N** 的任何着色无关。但是，正如任何一个非主要的超滤子能使我们用一种直接的方式找到单色的无限集，这个幂等的超滤子能使我们找到一个适当的无限集。令 $\mathbf{N}=C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_k$ 是将 **N** 分解成各颜色类的一种分解。这些颜色类中恰有一个，比如说 C_i，属于 **P**。记 $A_1=C_i$。选取 $a_1\in A_1$ 和 $A_2\in\mathbf{P}$，$A_2\subset A_1-\{a_1\}$，使 $a_1+A_2\subset A_1$。然后选取 $a_2\in A_2$ 和 $A_3\in\mathbf{P}$，$A_3\subset A_2-\{a_2\}$，使 $a_2+A_3\subset A_2$，等等。集 $A=\{a_1,a_2,\cdots\}$ 显然有要求的性质：每个无穷和 $\sum_{x\in X}x$，$X\subset A$，有颜色 i。 □

最后应该强调，在这一节中所介绍的各无限的 Ramsey 结果只构成整个理论的很小一部分：被称为**划分学**的无限集的 Ramsey 理论是集论的一个基本的和优雅的分支，它有大量的文献。

划分学的基础大约是在二十多年以前由 Erdös 和 Rado 奠定的，他们也引入了在本章中使用的箭头记号，用以表达有关大基数的断言。

〔练　　习〕

1. 证明定理 3 与 $R_k^{(r)}(s_1,s_2,\cdots,s_k)<\infty$ 的等价性。

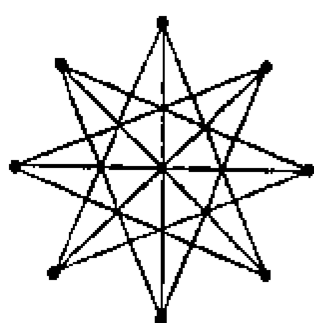
   (i) 直接证明，

   (ii) 使用定理 10。

2. 证明 $R(3,4)=9$。

3. 推广图 Ⅵ.4 中的构造，对于每个 $t\geq 2$，

找出一个 t—正则图，它表明 $R(3,t+1)\geqslant 3t$。


图Ⅵ.4.表明 $R(3,4)\geqslant 9$ 的图。

4. 考虑顶点集为 Z_{17}(模17整数)的一个图，在其中 i 联结 j 当且仅当 $i-j=\pm 1,\pm 2,\pm 4$，或 ± 8。证明：$R(4,4)=18$。

5. 证明：$R(3,5)=14$。

6. 令 e 是 K^4 的一条边，证明：$r(K^4-e,K^4)=11$（参看练习 4）。

7. 考虑以 16 阶域 $GF(16)$ 为顶点集的 K^{16} 的 3—边着色，在其中，边 ij 的颜色依赖于 $i-j$ 所属的三次剩余的陪集，证明：$R_3(3,3,3)=17$。（必须检查该图的定义是确定的。）

8. 确定§1 末尾给出的 $R_k^{(r)}(s_1,\cdots,s_k)$ 的上界。

9.⁻ 给定 $2\leqslant k\leqslant n$，用 $c_k(n)$ 表示在 K^n 的边的每个 k—着色中可以找到 $c_k(n)$ 阶单色连通子图的最大整数。证明：$c_2(n)=n$（参看第Ⅰ章练习 13）。

10.⁻ 证明：如果 $n\geqslant 2$ 是偶数，$c_{n-1}(n)=2$；如果 $n\geqslant 3$ 是奇数，$c_{n-1}(n)=3$。〔提示：使用第Ⅰ章定理 9。〕

11.⁺ 证明：

$$c_3(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}+1 & \text{如果 } n\equiv 2(\bmod 4),\\ \left\lceil\dfrac{n}{2}\right\rceil & \text{否则。}\end{cases}$$

12. 验证：$r(2K^3,K^3)=8$ 和 $r(2K^3,2K^3)=10$。

13. 证明：$r(C^4,C^4)=6$。

14. 使用第Ⅳ章定理 9 的证明来证明 $r_k(C^4,C^4,\cdots,C^4)$

$\leqslant k^2+k+2$。

15.$^+$ 使用有限域上的2—维向量空间（参看第Ⅳ章定理10）来证明：

$$r_k(C^4,C^4,\cdots,C^4)=k^2+O(k)。$$

16. 考虑 $H_1=P^5$ 和 $H_2=K^{1,3}$，证明：

$$r(H_1,H_2)\geqslant\min_{i=1,2}r(H_i,H_i)$$

不必成立。

17.$^+$ 令 H_p 和 H_q 分别是 p 和 q 阶图，且令 $\mathrm{cl}(\overline{H_p})=i$，$\mathrm{cl}(\overline{H_q})=j$，则存在仅依赖 p 和 q 的常数 C，使

$$ps+qt-\min\{si,tj\}-2\leqslant r(sH_p,tH_q)\leqslant ps+qt-\min\{si,tj\}+C。$$

〔提示：找一个红 $K^{j(p-i)}$，比如说R，一个蓝 $K^{i(q-j)}$，比如说 B，和另外的 ij 个顶点的集 N，使 RN 的各边是红的，而 BN 的各边是蓝的。参看定理8的证明。〕

18. 证明：集$\{x_0,x_1,\cdots,x_l\}\subset\mathbf{R}^n$是非球面的当且仅当对某个 c_i 有

$$\sum_1^l c_i(x_i-x_0)=0\text{和}\sum_1^l c_i(|x_i|^2-|x_0|^2)=b\neq0。$$

19. 令 $b,c_1\cdots,c_l\in\mathbf{R}^1$，$b\neq0$，证明：存在这样的整数 k 和 $\mathbf{R}^1$ 的某个 k—着色，使方程

$$\sum_1^l c_i(x_i-x_0)=b$$

不存在具有相同颜色的解 $x_0,x_1,\cdots,x_l$。

20. 证明：每个Ramsey集是球面的。〔提示：给定一个非球面的集$\{x_0,x_1,\cdots,x_l\}\subset\mathbf{R}^n$，象在练习18中那样寻求$(c_i)$

和 b，象在练习 19 中那样选取 k 和 $\mathbf{R}^1$ 的一个 k—着色。使用这个 k—着色定义 $\mathbf{R}^n$ 的一个 k—着色：把 $x\in\mathbf{R}^n$ 着上 $|x|^2$ 的颜色。〕

21. 令 $f(n)$ 是具有下面性质的最小整数 N：只要 X 是平面上没有三点共线的 N 个点的一个集，X 就包含构成凸 n 边形的 n 个点。证明：对于每个 $n\geqslant 4$，$f(n)\leqslant R^{(4)}(5, n)$。你能给出 $f(5)$ 的更好的界吗？

22. 令 S 是平面上的一个无限点集，证明：存在这样的无限集 A，使得或 A 包含在一条直线上，或 A 中没有三点共线。

23. 证明：$R_k(3,3,\cdots,3)\leqslant\lfloor ek!\rfloor+1$。

24. 由练习 23 导出下面的 Schur 定理：如果把不超过 $ek!$ 的所有自然数划分成 k 类，则方程 $x+y=z$ 在这些类的至少一类中可解。

25. 证明：存在自然数的一个无限集，使其中任何两个元素之和有偶数个素因子。

26.† 证明：存在这样的自然数序列 $n_1<n_2<\cdots$，使得如果 $r<i_1<i_2<\cdots<i_r$，则 $\sum\limits_{j=1}^{r}n_{i_j}$ 有偶数个素因子当且仅当 r 有奇数个素因子。

27. 定义一个图，它有顶点集 $[1, N]^{(2)}$，联结 $a<b$ 与 $b<c$。证明：这个图不包含三角形且它的色数同 N 一起趋向于无穷。〔参看第Ⅴ章练习 11〕。

---

† 此处要求 $A\subset S$。——校注。

28. 令 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_n(x)$ 都是有界实函数，并令 $f(x)$ 是另一个实函数。令 ε 和 δ 都是正常数。假设当 $f(x)-f(y)>\varepsilon$ 时，$\max_i(g_i(x)-g_i(y))>\delta$。证明：$f(x)$ 是有界的。

注

基本 Ramsey 定理见于 F.P.Ramsey, On a problem of formal Logic, Proc.Lond.Math.Soc.(2)30(1930)264—286。定理 4,7 和 8 属于 V.Chvatal, P.Erdos and J.Spencer, 可在下书中找到，S.A.Burr, Generalized Ramsey theory for graphs——a survey in Graphs and Combinatorics (R Bari and F.Harary, eds), Springer——Verlag, 1974, pp.52—75. 对于 Nesetril 和 Rodl 的某些深刻结果，其中之一是定理 9，请参看 J.Nesetril and V.Rodl, The Ramsey property for graphs with forbidden subgraphs, J.Combinatorial Theory Ser.B, 20(1976)243—249，和 Partitions of finite relational and set systems, J.Combinatorial Theory Ser.A 22(1977) 289—312

§8 中的几何 Ramsey 结果可在下文中找到，P.Erdős, R.L.Graham, B.L.Rothschild, J.Spencer and E.G.Straus, Euclidean Ramsey theorems, I, J.Combinatorial Theory Ser.A14(1973)344—363. 定理 15 见于 A.Hales and R.I.Jewett, Regularity and positional games. Trans.Amer.Math.Soc.106(1963)222——229. Rota 猜想的证明见 R.L.Graham and B.L.Rothschild, Ramsey's theorem for n——parameter sets, Trans.Amer.Math.Soc.159(1971)257——292. 关于 Ramsey 范畴的结果见 R.L.Graham, K.Leeb and B.L.Rothschild, Ramsey's theorem for a class of categories, Adv. in Math.8(1972) 417—433 (勘误，同刊 10 (1973) 326—327). Van der Waerden's 定理见于 B.L.van den Waerden, Beweis einer Baudetschen Vermutung, Nieuw Archief voor Wiskunde 15(1927)212—216. 我们给出的简单证明出自 R.L.Graham and B.L.Rothschild, A sho-

rt proof of van der Waerden's theorem on arithmetic progressions, Proc. Amer. Math. Soc. 42(1974)385—386.

在§3末尾叙述的Rado定理出自R.Rado, Studien zur Kombinatorik, Math. Zeitschrift 36(1933)424—480.

§4中前面的几个结果见于F.Galvin and K.Prikry, Borel sets and Ramsey's theorem, J. Symbolic logic 38(1973)193—198; Glazer对Hindman定理的证明见W.W.Comfort, Ultrafilters, some old and some new results, Bull. Amer. Math. Soc. 83(1977)417—455.

练习5见R.E.Greenwood and A.M.Gleason, Combinatorial relations and chromatic graphs, Canad. J. Math. 7 (1955) 1—7, 练习9在F.Galvin的一个注中，而Schur定理(练习27)见I.Schur, Über die Kongruenz $x^m+y^m=z^m (\mathrm{mod}\, p)$, Jahr. Deutsch. Math. Ver. 25(1916)114—116。

第Ⅶ章　随机图

"给出 Ramsey 数 $R(s,s)$的一个'好'下界，即证明：存在这样的大阶图，此图和它的补都不包含 K^s"。"证明：对于每个自然数k，存在一个不包含三角形的 k——色图"。我们不久就会认识到，象这些问题看来所要求的各种构造是不容易得到的。以后我们要证明，对于每个 k，都存在具有后一性质的图，但是，既便对于 $k=4$，我们的图至少要有 2^{32} 个顶点，本书不包括这样图的图形。事实上，本章的目的是证明，为了解决这些问题，我们可以使用概率方法来表明这样的图的存在性而不是要实际构造它们。（应该注意，我们仅仅为了方便而使用概率论的语言，因为我们需要的全部概率论证可以用计数各种集合中对象的数目的方法来代替。）这一现象不限于图论和组合学，在最近一、二十年中，概率方法已经极成功地应用于富里叶分析、函数空间理论、数论、巴拿哈空间几何等等，但是，没有任何一个领域比在组合学中使用概率（或计数）方法更自然了。

在大多数情形，我们使用两个密切相关的概率模型中的一个。我们从有区别的（加标记的）一些顶点的一个固定的集合开始，然后，或者以某个概率 $p(0<p<1)$ 选取每一条边，并且每一条边的选取独立于其它边的选取；或者，我们取所有的 n 阶和 m 级的图，把它们作为概率空间中的点，这些点具有等概率。在第一种情形，我们用 $\Phi(n,P(\text{edge})=$

p)表示概率空间，在第二种情形，我们用 $\Phi(n,M)$ 表示概率空间。当然，在更复杂的模型中，我们将从边的几个不相交的子集中，选取具有一些给定概率的边。

在头两节中，我们将会看到，在试图解决包括上面提到的一些问题的有关图的直接的问题时，随机图可以是一种有力的工具，并且，随机图本身也是很令人感兴趣的。一个随机图可以看作是当 p 或 M 增加时，随着所得到的边越来越多而发展起来的一个组织，一个给定的性质可能在某个发展阶段突然出现，这是使人着迷而又相当惊人的，在最后两节中，我们介绍这一现象的一些例子。

§1 完全子图和Ramsey数——期望的应用

令 n、N 和 M 是自然数，$0\leqslant M\leqslant N=\binom{n}{2}$。我们考虑具有顶点集 $V=\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有 M 级图的集 $\Omega=\Phi(n,M)$，显然，Ω 有 $\binom{N}{M}$ 个元素，特别是，如果 $M=0$，则 $\Omega=\{E^n\}$，如果 $M=N=\binom{n}{2}$，则 $\Omega=\{K^n\}$。（我们用 M 表示边数，是为了强调 M 以比 n 高的阶趋向于无穷。我们不能使用 e，是因为自然对数的底将在许多公式中出现。）为了方便起见，我们把 Ω 看作一个概率空间，在其中，各个点(即图)有等概率 $1/|\Omega|$，这时，所有图不变量都看作是 Ω 上的随机变量，因此，我们可以讨论它们的期望值、标准差，等等。在计算中，我们常常使用二项式系数的各种估计，为方便起见，现在把它们列出来。首先回忆斯特林公式

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\, e^{\alpha/(12n)} , \tag{1}$$

此处 α 依赖于 n，但它在 0 和 1 之间。下面的估计，其中 $0 \leqslant x \leqslant x+y \leqslant a$ 和 $x \leqslant b \leqslant a$，是用展开二项式系数和应用斯特林公式(1) 得到的。

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\frac{a}{b}\right)^b \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\frac{a}{a-b}\right)^{a-b}\left(\frac{a}{b}\right)^b \leqslant$$

$$\binom{a}{b} \leqslant \left(\frac{a}{a-b}\right)^{a-b}\left(\frac{a}{b}\right)^b \leqslant \left(\frac{ea}{b}\right)^b , \tag{2}$$

和

$$\left(\frac{a-b-y}{a-x-y}\right)^y \left(\frac{b-x}{a-x}\right)^x \leqslant \binom{a-x-y}{b-x}\binom{a}{b}^{-1}$$

$$\leqslant \left(\frac{a-b}{a}\right)^y \left(\frac{b}{a}\right)^x \leqslant e^{-(b/a)y-(1-(b/a))x} 。 \tag{3}$$

作为在图论中使用概率语言的第一个实例，我们给出 Ramsey 数 $R(s,t)$ 的一个下界，这个下界基于有给定的阶的完全子图数目的期望值. 对于 $G \in \Omega$，用 $X_s = X_s(G)$ 表示在 G 中的 K^s 子图的数目，于是 X_s 是概率空间 Ω 上的整值随机变量。

定理 1： 包含在图 $G \in \Omega = \Phi(n, M)$ 中的 K^s 子图的数目的期望值是

$$E(X_s) = \binom{n}{s}\binom{N-\binom{s}{2}}{M-\binom{s}{2}}\binom{N}{M}^{-1} 。$$

证明：我们已经注意到，$|\Omega| = \binom{N}{M}$。

为了计算在 $G\in\Omega$ 中的 K^s 子图的数目的期望值，我们首先计算包含一个固定的 s 阶完全子图 K_0 的图 $G\in\Omega$ 的数目。如果 $K_0\subset G$，则 G 的各边中有$\binom{s}{2}$条被确定（即在 K_0 中的边），而剩下的 $M-\binom{s}{2}$条边必须从 $N-\binom{s}{2}=\binom{n}{2}-\binom{s}{2}$ 条边的集中选取，这样，有

$$\binom{N-\binom{s}{2}}{M-\binom{s}{2}}$$

个图 $G\in\Omega$ 包含K_0。因为对于 K 存在$\binom{n}{s}$种选法，故包含在 $G\in\Omega$ 中的 K^s 子图的数目的期望值就如定理所述。□

定理 2. 如果 s，$t\geqslant 3$，则

$$R(s,\ t)>\exp\left\{\frac{(s-1)(t-1)}{2(s+t)}\right\},$$

特别是

$$R(s,s)>e^{(1/4)(s-1)^{2/s}}。$$

证明：首先注意，图 $G=(t-1)K^{s-1}$ 不包含 K^s，而它的补 $K_{s-1}(t-1)$不包含 K^t，故 $R(s,t)\geqslant(s-1)(t-1)+1$，因此我们可以假设

$$n=\left[\exp\left\{\frac{(s-1)(t-1)}{2(s+t)}\right\}\right]\geqslant(s-1)(t-1)+1,$$

故特别有：$8\leqslant s\leqslant t$。

令

$$M = \left\lfloor \frac{s}{s+t} N \right\rfloor, \quad M' = N - M < \frac{t}{s+t} N + 1,$$

并令E_s是在n阶和M级图中K^s子图的期望值，同样，令E_t是在这样图的补中（即在图$G(n,M')$中）K^t子图的期望值。我们使用不等式(2)和(3)来估计定理1中给出的E_s的表示式，得到

$$\log E_s \leqslant s(\log n + 1 - \log s) - \frac{t}{s+t} \frac{s(s-1)}{2}$$

$$\leqslant - \frac{s(s-1)}{2(s+t)} + 1 - s(\log s - 1) < -3。$$

同样有

$$\log E_t \leqslant t(\log n + 1 - \log t) - \frac{s}{s+t} \frac{t(t-1)}{2}$$

$$+ \frac{t(t-1)}{n(n-1)} = - \frac{t(t-1)}{2(s+t)} + 1 - t(\log t - 1)$$

$$+ \frac{t(t-1)}{n(n-1)} < -3。$$

因此，$E_s + E_t < 1$，故存在图$G \in \Omega$，它不包含K^s，它的补不包含K^t，因此，$R(s,t) \geqslant n$，这正是所要求的。 □

显然，对于$s=3$和大的t，定理2给出的界是很不好的。在§2中，我们将概要地叙述上面证明的更精细的变形，它给出$R(3,t)$的一个好得多的界，但是，我们先使用直接论证的方法来获得Zarankiewicz问题中的下界（参看第Ⅳ章中的定理8和10）。

定理3： 令 $2\leqslant s\leqslant n_1$，$2\leqslant t\leqslant n_2$，$\alpha=(s-1)/(st-1)$ 和 $\beta=(t-1)/(st-1)$，则存在级为

$$\left\lfloor\left(1-\frac{1}{s!\,t!}\right)n_1^{1-\alpha}n_2^{1-\beta}\right\rfloor$$

的二部图 $G_2(n_1,n_2)$，它不包含 $K(s,t)$（第一类有 s 个顶点而第二类有 t 个顶点）。

证明：令

$$n=n_1+n_2,$$

$$V_1=\{1,2,\cdots,n_1\},$$

$$V_2=\{n_1+1,\ n_1+2,\cdots,n_1+n_2\},$$

$$E=\{ij:\ i\in V_1,\ j\in V_2\},$$

$$M=\lfloor n_1^{1-\alpha}n_2^{1-\beta}\rfloor。$$

我们考虑概率空间 $\Omega=\Phi(n,M;E)$，它由$\binom{|E|}{M}$个图组成，这些图具有顶点集 $V=V_1\cup V_2$，在 E 中恰有 M 条边而在 E 外没有边。（注意：这不是前面各定理中考虑的概率空间)。包含在图 $G\in\Omega$ 中的 $K(s,t)$子图的期望值是

$$E_{s,t}=\binom{n_1}{s}\binom{n_2}{t}\binom{|E|-st}{M-st}\binom{|E|}{M}^{-1}。$$

因为第一个因子是 $K(s,t)$的第一类可以被选取的方法的数目，第二个因子是第二类可以被选取的方法的数目，而且因为 $K(s,t)$有 st 条边，依据(3)，我们有

$$E_{s,t}\leqslant\frac{1}{s!\,t!}n^s{}_1n^t{}_2\left(\frac{M}{n_1n_2}\right)^{st}<\frac{1}{s!\,t!}n_1^{1-\alpha}\ n_2^{1-\beta}。$$

这样，存在图 $G_0\in\Omega$，它包含的完全二部图 $K(s,t)$ 少于 $(1/s!\,t!)n_1^{1-\alpha}\ n_2^{1-\beta}$ 个。从 G_0 中的每个 $K(s,t)$ 中删除一条

边，所得到的图 $G=G_2(n_1,n_2)$ 至少有

$$\lfloor n_1^{1-\alpha}\ n_2^{1-\beta}\rfloor - \frac{1}{s!\,t!}\ n_1^{1-\alpha}\ n_2^{1-\beta} \geqslant$$

$$\left\lfloor\left(1-\frac{1}{s!\,t!}\right)n_1^{1-\alpha}\ n_2^{1-\beta}\right\rfloor \qquad \square$$

条边，但不包含 $K(s,t)$。

用类似的方法，我们可以构造一个 n 阶和为级，

$$\left\lfloor \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{s!\,t!}\right)n^{2-(s+t-2)/(st-1)}\right\rfloor \quad .$$

它不包含 $K(s,t)$（参看练习 4）。

实践表明，用随机图的方法得到的答案与最好的可能的答案通常差一个因子 2。例如，随机图给出 $R(s,s)>2^{s/2}$，而我们料想 $R(s,s)$的实际值是在 2^s 附近。同样，我们认为，存在具有 $c_t n^{2-(1/t)}$ 条边且不包含 $K(t,t)$的 n 阶图，此处 c_t 是仅依赖于 t 的正常数，而随机图表明它能有 $c_t n^{2-(2/t)}$ 条边，然而，在这两种情形中随机图都给出已知的最好的下界。

§2 围长和色数——改造随机图

当寻求具有某种性质的图时，有时，我们把图的一个集变成一个概率空间，并希望在该空间中的大部分图有所要求的性质，如果不这样也不要紧，因为我们可以把图稍加改变，使其具有要求的那种性质。我们将用一个很简单的例子来说明这一点。整个这一节，我们讨论顶点集为有 n 个可区别的顶点的一个固定的集而级为 M 的全部图组成的概率空

间 $\Omega=\Phi(n,M)$。

定理 4. 给定自然数 $\delta\geqslant 3$ 和 $g\geqslant 4$，存在阶至多为 $(2\delta)^g$ 的一个图，它的最小度至少为 δ，而围长至少为 g。

证明： 令 $\Omega=\Phi(n,M)$，此处 $n=(2\delta)^g$ 和 $M=\delta n$。用 $Z_l(G)$ 表示图 G 中长为 l 的圈的数目，这样，Z_l 是空间 Ω 上的随机变量。Z_l 的期望值 $E(Z_l)$ 等于什么？长为 l 的圈 C_o 确定包含此圈的图 G 中的 l 条边，G 的其余 $M-l$ 条边必须从 $\binom{n}{2}-l=N-l$ 条边的集中选取。因为对于 C_o 的顶点集有 $\binom{n}{l}$ 种取法，而给定了顶点集，C_o 有 $\frac{1}{2}(l-1)!$ 种取法，所以

$$E(Z_l)=\frac{1}{2}(l-1)!\ \binom{n}{l}\binom{N-l}{M-l}\binom{N}{M}^{-1}\leqslant$$

$$\frac{1}{2l}\ n^l\left(\frac{M}{N}\right)^l。$$

在上面的不等式中，对于 $a=N$，$b=M$，$x=l$ 和 $y=0$，我们应用了(3)式。对 l 求和，我们求得。

$$\sum_{l=3}^{g-1}E(Z_l)\leqslant\sum_{l=3}^{g-1}\frac{1}{2l}n^l\left\{\frac{\delta n}{N}\right\}^l<\sum_{l=3}^{g-1}(2\delta)^l<n。$$

因此，存在图 $G\in G(n,\delta n)$，它包含长至多为 $g-1$ 的圈最多 $n-1$ 个。因此，从长至多为 $g-1$ 的每个圈中删除一条边，我们得到一个 n 阶和 $M'>(\delta-1)n$ 级的图 H。由第Ⅳ章中简单的练习 11 我们知道，H 包含最小度至少为 δ 的图。 □

下面的结果解决了本章引言中提出的第二个问题。

定理5. 给定自然数 $k\geqslant 4$ 和 $g\geqslant 4$，存在围长为 g（和阶为 $k^{4g}+g$）的一个 k—色图。

证明： 令 $\Omega=\Phi(n,M)$，此处 $n=k^{4g}$ 和 $M=k^3n$。然后象在前面证明中那样，有。

$$\sum_{l=3}^{g-1}E(Z_l)<\sum_{l=3}^{g-1}(2k^3)^l<(2k^3)^g<\frac{1}{g}n^{1/2}。$$

记 $f=(2k^3)^g$ 并用 Ω_1 表示在 Ω 中的包含至多 3δ 个长小于 g 的圈的图的集。则平凡地（或依据切比雪夫不等式，参看§4），有

$$P(\Omega_1)\geqslant\frac{2}{3}。$$

现在，记 $p=(n/k)+1=k^{4g-1}+1$ 并估计集 Ω_2 的测度 $P(\Omega_2)$，此处 Ω_2 是满足下列条件的图 G 的集：G 中任意 p 个顶点导出的子图中含有的边的条数多于 $3f$ 条，显然。在 Ω_2 中的图都不是 $(k-1)$—可着色的，并且我们删去它们的边中的任何 $3f$ 条，仍不能用 $(k-1)$ 种颜色对它们着色。为了估计 $P(\Omega_2)$。我们计算 $I_p^l=I_p^l(G)$ 的期望，I_p^l 是在其中恰有 G 的 l 条边的顶点的 p—集的数目。选取 p 个顶点的集有 $\binom{n}{p}$ 种方法，联结这样一个集的各顶点的 l 条边的取法有

$$\binom{\binom{p}{2}}{l}$$

种，而其余的 $M-l$ 条边的取法有

$$\binom{N-\binom{p}{2}}{M-l}$$

种，这样

$$E(I_p^l)=\binom{n}{p}\binom{\binom{p}{2}}{l}\binom{N-\binom{p}{2}}{M-l}\binom{N}{M}^{-1}。$$

应用(3)并对 l 求和，我们求得

$$\sum_{l=0}^{3f}E(I_p^l)\leqslant\sum_{l=0}^{3f}\left(\frac{en}{p}\right)^p\left(\frac{ep^2}{2}\right)^l\exp\{-$$

$$M\binom{p}{2}\binom{n}{2}^{-1}\}<k^pe^{p+3f}p^{6f}\exp\{-kn\}。$$

右边的对数至多为

$$n+\frac{n}{3}+n^{2/3}+\frac{3}{2}n^{2/3}\log n-kn<-\frac{1}{2}n。$$

因此，

$$\sum_{l=0}^{3f}E(I_p^l)<e^{-n/2}<\frac{1}{3},$$

故

$$p(\Omega_2)>\frac{2}{3}$$

所以

$$P(\Omega_1\cap\Omega_2)>\frac{1}{3}。$$

每个图 $H\subset\Omega_1\cap\Omega_2$ 可用很简单的方式加以改造，以提供一个具有所要求的性质的图。事实上，因为 $H\in\Omega_1$，它

包含最多 $3f$ 个长小于 g 的圈。令 F 是由 H 删除 $3f$ 条边而得到的图，而且 G 中每个长小于 g 的圈至少删去一条边，则 F 有围长 $g(F)\geqslant g$。因为 $H\in\Omega_2$，此图 F 不包含 $p=(n/k)+1$ 个独立顶点，故 $\chi(F)\geqslant k$。令 G 是一个圈 C^g 和 F 的一个 k—色子图的不相交并。 □

在 §1 中我们约定要叙述出 Erdös 给出的 Ramsey 数 $R(3,t)$ 的一个下界的证明的概要。这个概要是相当粗糙的，因为这个证明的细节有些专门化而很繁杂。

定理 6. 存在一个常数 $c>0$，使对于每个 $t\geqslant 2$ 有

$$R(3,t)\geqslant c\left(\frac{t}{\log t}\right)^2。$$ □

只要证明，存在这样一个（大的）正常数 A，对于每个 n，都存在没有三角形也没有 $\lfloor An^{1/2}\log n\rfloor$ 个独立顶点的图 G^*。事实上很容易验证，如果存在这样的常数，则 $c=\frac{1}{4}A^{-2}$ 将满足定理中的不等式。

为了证明 A 的存在，我们选取一个常数 $B>0$，并考虑概率空间 $\Omega=\Phi(n,M)$，此处 $M=\lfloor B^{-1/2}n^{3/2}\rfloor$。给定 $G\in\Omega$，令 E^* 是把它们取掉之后破坏 G 中的每个三角形的边的极小集。如果 $H=G-E^*$ 包含 $p=\lfloor Bn^{1/2}\log n\rfloor$ 个独立顶点的集 W，则 $G[W]$ 的每条边也必包含在 G 的一个三角形中，这个三角形的第三个顶点在 W 之外。我们可以证明，如果

B 和 n 都充分大，比如说 $B \geqslant B_0$ 和 $n \geqslant n_0$，则大部分图 $G \in \Omega$ 不包含这样的集 W，显然，$A = B_0 n_0{}^2$ 有所要求的性质。

§3 几乎所有图的简单性质——概率的基本应用

在这一节中，我们将引进并研究模型 $\Phi(n, P(\text{edge}) = p)$，这个模型中的每个图的各条边都是独立地并以相同的概率 p 选取的，$0<p<1$。这样，$\Phi(n, p(\text{edge}) = p)$ 由以一个固定的具有 n 个有区别的顶点作为顶点集的全部图组成，而一个具有 m 条边的图的概率是 $p^m q^{N-m}$，此处 $q = 1 - p$，如前，$N = \binom{n}{2}$，这样，q 是给定的一对顶点不被联结的概率，而 N 是最大可能的边数。在前一节中我们已经看到，知道模型中的大部分图都具有某种性质是多么有用。现在，我们将进一步讨论几乎所有的图所共有的性质。令 Ω_n 是所有 n 阶图组成的一个概率空间，给定一个性质 Q，如果 $n \to \infty$ 时，$P(G \in \Omega_n$：G 有 $Q) \to 1$，我们就说**几乎每个**(a, e)**图**都有性质 Q。在这一节中，我们总是取 $\Omega_n = \Phi(n, P(\text{edge}) = p)$，此处 $0<p<1$ 可能依赖于 n。

我们首先假设，$0<p<1$ 是固定的，即 p 是独立于 n 的。

有许多简单的性质对于 $\Phi(n, P(\text{edge}) = p)$ 中的 $a.e.$ 图成立。例如，如果 H 是任一固定的图，则 $a.e.$ 图 $G \in \Phi(n, P(\text{edge}) = p)$ 包含 H 作为生成子图。事实上，如果 $|H| =$

h，则由给定的 h 个顶点的一个集生成的同构于 H 的 G 的子图的概率是正的，设为 $r>0$。因为 $V(G)$ 包含 $\lfloor n/h \rfloor$ 个由顶点组成的互不相交的子集，其中每个子集各有 h 个顶点，G 的任何生成子图均不同构于 H 的概率是 $(1-r)^{\lfloor n/h \rfloor}$，当 $n\to\infty$ 时，它趋于 0。下面的定理是上述结论的加强形式。

定理 7. 令 $1\leqslant h\leqslant k$ 是两个固定的自然数，并令 $0<p<1$ 也是固定的，则在 $\Phi(n, P(\text{edge})=p)$ 中 a.e. 图 G 都满足下列条件：对于 k 个顶点的每一个序列 $x_1, x_2, \cdots, x_k$，都存在一个顶点 x，使如果 $1\leqslant i\leqslant h$，则 $xx_i\in E(G)$；如果 $h<i\leqslant k$，则 $xx_i\notin E(G)$。

证明： 令 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是任意一个序列，顶点 $x\in W=V(G)-\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ 具有所要求的性质的概率是 $p^h q^{k-h}$。因为，对于 $x, y\in W$，$x\neq y$，边 xx_i 的选取是独立于边 yx_i 的选取的，对于这个特定的序列，找不到定理中要求的顶点 x 的概率是 $(1-p^h q^{k-h})^{n-k}$。因为对于序列 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 有 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ 种取法，存在找不到定理中要求的 x 的序列 $x_1, x_2, \cdots x_k$ 的概率至多为

$$\varepsilon=n^k(1-p^h q^{k-h})^{n-k}。$$

显然，当 $n\to\infty$ 时，$\varepsilon\to 0$。 □

依据 Gaifman 的有关一阶语句的一个结果，定理 7 蕴含：对于固定的 $0<p<1$，关于图的每个一阶语句，或对于 $\Phi(n, p(\text{edge})=p)$ 中 a.e. 图为真，或对 a.e. 图为假。这个结果看起来似乎相当复杂，实际上，它比简单的定理 7 弱，

因为，给定任何一阶语句，定理7能使我们直接推断，一个语句是对 $a.e.$ 图成立，还是对 $a.e.$ 图不成立。特别是，对于一个固定的 p，$0<p<1$，关于模型 $\Phi(n, p(\text{edge})=p)$ 的下列各命题都是定理7的直接结果。

1. 对于固定的整数 k，$a.e.$ 图都是 k—连通的。

2. $a.e.$ 图有直径2。

3. 给定图 H，$a.e.$ 图 G 都满足下列条件的：如果 $F_0 \subset G$ 同构于 H 的子图 F，则存在一个同构于 H 的图 H_0，满足 $F_0 \subset H_0 \subset G$。

很自然，使我们感兴趣的大部分命题都不是一阶语句，因为它们是关于顶点的大子集的。"对于给定的 $\varepsilon>0$，$a.e.$ 图至少有 $\frac{1}{2}(p-\varepsilon)n^2$ 条边且至多有 $\frac{1}{2}(p+\varepsilon)n^2$ 条边"。"几乎没有图能用 $n^{1/2}$ 种颜色着色"。"$a.e.$ 图都包含 $(\log n)/(\log(1/p))$ 阶完全图"。"给定 $\varepsilon>0$，$a.e.$ 图都是 $\frac{1}{2}(p-\varepsilon)n$——连通的"。这些命题对于固定的 p 皆为真实的，但是容易证明（参看练习8—11），它们中没有一个是一阶语句。

现在，我们假设 $0<p<1$ 并依赖于 n，但当 $n\to\infty$ 时，$pn^2\to\infty$ 和 $(1-p)n^2\to\infty$，再来研究模型 $\Phi(n, P(\text{edge})=p)$。如前，我们记 $N=\binom{n}{2}$，对于 $M=0,1,\cdots,N$，用 Ω_M 表示 $\Phi(n,M)$ 中图的集。显然 $\Omega=\bigcup_{M=0}^{N}\Omega_M$，而 Ω_M 中的各元素在 $\Phi(n,M)$ 中和在 $\Phi(n,P(\text{edge})=p)$ 中都有相等的概率。

我们将证明，当 M 在 pN（即 Ω 中的图的边数的期望值）附近时，模型 $\Phi(n,M)$和 $\Omega=\Phi(n,p(\text{edge})=p)$ 是很接近的。

把 Ω 中的概率写作 p，我们看出

$$P(\Omega_M)=\binom{N}{M}p^M q^{N-M}。$$

因此，

$$\frac{P(\Omega_M)}{P(\Omega_{M-1})}=\frac{M+1}{N-M}\quad\frac{q}{p}。\tag{4}$$

这表明，$P(\Omega_M)/P(\Omega_{M+1})$ 随 M 递增，而且对于满足条件 $pN-1\leqslant M\leqslant pN+1$ 的某个 M，$P(\Omega_M)$ 达到最大值。并且，如果 $0<\varepsilon<1$ 且 n 是充分大的，则因为当 $n\to\infty$时，$pn^2\to\infty$，当 $M<(1-\varepsilon)pN$ 时，有

$$\frac{P(\Omega_M)}{P(\Omega_{M+1})}<1-\varepsilon,$$

而当 $M>(1+\varepsilon)pN$ 时，有

$$\frac{P(\Omega_M)}{P(\Omega_{M+1})}<(1+\varepsilon)^{-1}。$$

记 $N_\varepsilon=\lfloor(1+\varepsilon)pN\rfloor$和 $N_{-\varepsilon}=\lceil(1-\varepsilon)pN\rceil$，由这些不等式我们看出，在 Ω 中的 a.e.图满足 $N_{-\varepsilon}\leqslant e(G)\leqslant N_\varepsilon$，即当 $n\to\infty$时，有

$$P\left(\bigcup_{M=N_{-\varepsilon}}^{N_\varepsilon}\Omega_M\right)\to1。\tag{5}$$

(4) 式的另一个推论是，存在这样一个 $\eta>0$（实际上，任何一个 $0<\eta<\frac{1}{2}$ 都可以），如果 n 充分大，有

$$P\left(\bigcup_{M=0}^{pN}\Omega_M\right)>\eta。\qquad(6)$$

现在，(5)和(6)蕴含：如果 $\Omega^*\subset\Omega$ 满足条件：当 $n\to\infty$ 时，$P(\Omega^*)\to 1$，则对于任何 $\varepsilon>0$，存在 M_1 和 M_2，使 $(1-\varepsilon)pN\leqslant M_1\leqslant pN\leqslant M_2\leqslant(1+\varepsilon)pN$，且当 $n\to\infty$ 时，有

$$\frac{|\Omega_{M_i}\cap\Omega^*|}{|\Omega_{M_i}|}\to 1(i=1,\ 2)。\qquad(7)$$

如果 $G_1\subset G\subset G_2$ 和 G_1，$G_2\in\Omega^*$ 蕴含 $G\in\Omega^*$，我们称集 $\Omega^*\subset\Omega$ 是**凸的**，图的**凸性质**可类似地定义。容易看出，对于凸集 Ω^*，关系式(7)蕴含：如果 $M_1\leqslant M\leqslant M_2$，特别是，如果 $M=[pN]$，则 $n\to\infty$ 时，有

$$\frac{|\Omega_M\cap\Omega^*|}{|\Omega_M|}\to 1。\qquad(7')$$

我们把上述的断言重新表述为一个定理，它有关于模型 $\Phi(n,P(\text{edge})=p)$ 和 $\Phi(n,\ M)$ 之间的联系。

定理 8. 令 $0<p=p(n)<1$ 满足：当 $n\to\infty$ 时，$pn^2\to\infty$ 和 $(1-p)n^2\to\infty$，并令 Q 是图的一个性质。

(i)假设 $\varepsilon>0$ 是固定的，并且当 $(1-\varepsilon)pN<M<(1+\varepsilon)pN$ 时，在 $\Phi(n,M)$ 中的 a.e. 图都有 Q，则在 $\Phi(n,P(\text{edge})=p)$ 中的 a.e. 图有 Q。

(ii) 如果 Q 是凸性质且在 $\Phi(n,P(\text{edge})=p)$ 中的 a.e. 图都有 Q，则在 $\Phi(n,\lfloor pN\rfloor)$ 中的 a.e. 图都有 Q。 □

§4 几乎确定的变量——方差的应用

如果 $X=X(G)$ 是 $\Omega=\Phi(n,M)$ 或 $\Omega=\Phi(n,P(edge)=p)$ 上的一个非负的变量，而且 X 的期望至多是 a，则对 $t>1$ 有

$$P(X\leqslant ta)\geqslant \frac{t-1}{t}。$$

因此，如果 X 的期望很小，则对于大部分图来说 X 很小。这个简单的事实已经在前两节中反复使用过，但是，如果我们想证明，对于 Ω 中的几乎每个图 X 很大或非零，则期望值本身很难帮助我们，因此，我们必须试用一个稍微复杂一些的工具。通常，我们求助于**方差**。记得，如果 $\mu=E(X)$ 是 X 的期望，则

$$Var(X)=\sigma^2(X)=E((X-\mu)^2)=E(X^2)-\mu^2$$

是 X 的**方差**而 $\sigma=\sigma(X)>0$ 是**标准差**．切比雪夫不等式(它由基本原理直接得出）表明，如果 $t>0$，则

$$P(|X-\mu|\geqslant t)\leqslant \frac{\sigma^2}{t^2}。$$

特别是，如果 $0<t<\mu$，则

$$P(X=0)\leqslant P(|X-\mu|\geqslant t)\leqslant \frac{\sigma^2}{t^2}，$$

故
$$P(X=0)\leqslant \frac{\sigma^2}{\mu^2}。\tag{8}$$

在我们考虑的一些例子中，$X=X(G)$ 总是包含在某个类 $\Psi=\{F_1,F_2,\cdots\}$ 中的 G 的导出子图的数目，这里类 Ψ 可能依赖于 n 而且每个图 $F\in\Psi$ 与 G 有同一个标子号的顶

点集，则显然有

$$E(X^2)=\sum_{(F',F'')}P\ (G\ 包含\ F'\ 和\ F'')\ ,\qquad (9)$$

此处是对所有有序对(F',F'')求和，F'，$F''\in\Psi$。

在这一节中，我们将考虑空间$\Omega=\Phi(n,\ P(edge)=p)$，此处$0<p<1$是固定的，我们知道，这个空间接近于$\Phi(n,M)$，此处$M=\lfloor pn^2/2\rfloor$。如前，对于两个给定的顶点，它们不邻接的概率记作$q=1-p$。并且，如果当$n\to\infty$时，一项被$f(n)$除的商是有界的，则我们用Landau记号$O(f(n))$表示这一项，同样，如果当$n\to\infty$时，一项被$f(n)$除的商趋向于0，则用$o(f(n))$表示这一项。这样，$O(1)$是有界项，而$o(1)$是趋于0的项。

我们的目标是使用方差来证明，某些图不变量在我们的模型$\Phi(n,P(edge)=p)$中是几乎确定的。第一个定理是有关最大度的，在它的证明中，我们将使用经典的De Moivre-Laplace定理的一种特殊情形，这个定理是关于用正态分布逼近二项式分布的，令$0<c=c(n)=O(1)$并记$d(c)=\lfloor pn+c(pqn\log n)^{\frac{1}{2}}\rfloor$，假设$x(c)=c(\log n)^{1/2}\to\infty$，则

$$\sum_{k=d(c)}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=(1+o(1))\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x(c)}^{\infty}e^{-u^2/2}du$$

$$=(1+o(1))(2\pi c^2\log n)^{-1/2}n^{-c^2/2}。\qquad (10)$$

并且

$$\sum_{k=d(c)}^{n}\left\{\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\right\}^2=(1+o(1))(2\pi pqn)^{-1/2}$$

$$\int_{x(c)}^{\infty} e^{-u^2} du = (1+o(1))(8\pi pqc^2 n\log n)^{-1/2} n^{-c^2}$$

$$= o(n^{-c^2-\frac{1}{4}})。 \qquad (11)$$

定理9. 如果$0<p<1$是固定的，则在$\Omega=\Phi(n, P(edge)=p)$中的几乎每个图的最大度是

$$pn+(2pqn\log n)^{1/2}+o(n\log n)^{\frac{1}{2}}。$$

证明： 令$c>0$并用$X_c=X_c(G)$表示度至少为$d(c)=\lfloor pn+c(pqn\log n)^{1/2}\rfloor$的顶点的数目，则依据(10)有

$$\mu_c=E(X_c)=n\sum_{k=d(c)}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k q^{n-1-k}$$

$$=(1+o(1))(2\pi c^2\log n)^{-1/2} n^{1-(c^2/2)}$$

和

$$E(X_c^2)\leqslant E(X_c)+n(n-1)\sum_{k_1=d(c)}^{n-1}\sum_{k_2=d(c)}^{n-1}\binom{n-2}{k_1-1}$$

$$\binom{n-2}{k_2-1}p^{k_1+k_2-2}q^{2n-2-k_1-k_2}=\mu_c+(1$$

$$+o(1))\mu_c^2。$$

在$E(X_c^2)$的估计中，项

$$\binom{n-2}{k_1-1}\binom{n-2}{k_2-1}p^{k_1+k_2-2}\ q^{2n-2-k_1-k_2}$$

是下列事件的概率：给定顶点$a,b\in G, a\neq b$，顶点a联结于$V(G)-\{a,b\}$中的k_1-1个顶点，而顶点b联结于$V(G)-\{a,b\}$中的k_2-1个顶点。

现在，如果 $c=\sqrt{2}-\varepsilon$，此处 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$，则 $\mu_c \geqslant (1+o(1))n^{\varepsilon}$，故 $E(X_c^2)=(1+o(1))\mu_c^2$，而 $\sigma^2(X_c)=o(\mu_c^2)$，因此，依据(8)有

$$P(X_c=0)=o(1)。$$

所以几乎可以肯定 G 有一个顶点，其度至少为

$$pn+(\sqrt{2}-\varepsilon)(pqn\log n)^{1/2}。$$

另一方面，如果 $c=\sqrt{2}+\varepsilon$，$\varepsilon>0$，则

$$\mu_c=o(n^{-\varepsilon})$$

故

$$P(X_c\geqslant 1)=o(n^{-\varepsilon})。$$

□

上面的结果有一个有趣的推论。

推论 10. 如果 $0<p<1$ 和 $c>\sqrt{3}/2$，则在 $\Phi(n, P(edge)=p)$ 中几乎没有图有两个等度顶点，使其度至少为

$$d(c)=\lfloor pn+c(pqn\log n)^{1/2}\rfloor。$$

证明：存在两个这样顶点的概率至多为

$$n^2\sum_{k=d(c)}^{n-1}\left\{\binom{n-2}{k-1}p^{k-1}q^{n-1-k}\right\}^2,$$

而依据(11)，它是 $o(1)$。

□

综合定理 9 和推论 10，我们看出，a.e.图有唯一的一个最大度顶点。

在下一个定理中，我们再考虑当 p 随 n 变化的情形。如果

$$\lim_{n\to\infty} P_{n,p}(Q) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } p/t(n)\to 0 \\ 1 & \text{如果 } p/t(n)\to\infty \end{cases}$$

我们就说函数 $t(n)$ 对图的性质 Q 是一个**阈函数**。此处 $P_{n,p}(Q)$ 表示在 $\Phi(n,P(edge)=p)$ 中一个图有性质 Q 的概率。阈函数的存在意味着在一个随机图的发展中，即在图获得越来越多的边的过程中，该性质出现得相当突然。在这一节中，我们证明有关阈函数的一个基本结果。在下一节中，我们将给出一个非常好的结果，即哈密顿性有一个强阈函数[+]。

定理 11. 令 $k\geq 2, k-1\leq l\leq\binom{k}{2}$，令 $F=G(k,l)$ 是这样的图，其平均度不小于它的任何子图的平均度，则 $n^{-k/l}$ 是对 F 的阈函数，即若 $pn^{k/l}\to 0$，则在 $\Phi(n,P(edge)=p)$ 中几乎没有图包含 F；而若 $pn^{k/l}\to\infty$，则几乎每个图都包含 F。

证明：令 $p=\gamma n^{-k/l}$，$0<\gamma<n^{k/l}$，用 $X=X(G)$ 表示在 $G\in\Phi(n,P(edge)=p)$ 中同构于 F 的子图的数目，用 k_F 表示具有固定的 k 个标了号的顶点的集合并同构于 F 的图的数目。显然，$k_F\leq k!$，于是，

$$\mu=\mu_\gamma=E(X)=\binom{n}{k}k_F p^l(1-p)^{\binom{k}{2}-l}\leq$$

$$n^k(\gamma^l n^{-k})=\gamma^l,$$

故当 $\gamma\to 0$ 时，$E(X)\to 0$，这就证明了第一个断言。

+强阈函数的定义可仿照练习 14 作出。——校注。

现在，当 γ 很大时，我们来估计 X 的方差. 注意，存在常数 $c_1>0$，对每个 γ 有

$$\mu_\gamma \geqslant c_1 \gamma^l。\tag{12}$$

依据(9)，我们必须估计 G 包含两个固定的同构于 F 的子图 F' 和 F'' 的概率。记

$$A_s = \sum_s P(G \text{ 包含 } F' \text{ 和 } F''),$$

此处 $\sum_s$ 意味着，求和是对具有 s 个公共顶点的一切对(F'，F'')进行的。显然

$$A_0 < \mu^2。$$

并且，在 s 个顶点的一个集中，F' 有 $t \leqslant (l/k)s$ 条边，因此，首先计算对 F' 的取法，然后，计算与 F' 有 $s \geqslant 1$ 个公共顶点的 F'' 的取法，我们发现，对于某两个常数 c_2 和 c_3，有

$$\frac{A_s}{\mu} = \sum_{t \leqslant l s/k} \binom{k}{s}\binom{n-k}{k-s} k!\, p^{l-t} q^{\binom{k}{2}-l+t}$$

$$\leqslant \sum_{t \leqslant l s/k} c_2 n^{k-s} (\gamma n^{-k/l})^{l-t}$$

$$\leqslant c_2 m^{-s} \gamma^l + c_3 \gamma^{l-1}。$$

这里，在最后一步，我们把 $t=0$ 这一项与其余的项分开，因此，使用(12)，我们求得某个常数 c_4 有

$$\frac{E(X_2)}{\mu^2} = \frac{\sum_{s=0}^{k} A_s}{\mu^2} \leqslant 1 + c_4 \gamma^{-1}。$$

因此，依据(8) 有

$$P(X=0)\leqslant \frac{\sigma^2}{\mu^2}\leqslant c_4\gamma^{-1},$$

故当$\gamma\to\infty$时，$P(X=0)\to 0$。 □

在随机图中可以几乎确定的图不变量的一个最突出的例子是**团数**，即完全子图的最大阶．研究表明，对于固定的 p，$0<p<1$，在 $\Phi(n,\ P(edge)=p)$中，几乎每个图的团数都是两个可能值之一。事实上，对于 n 的大部分值（在某种完全确定的意义下），几乎每个图的团数只是 p 和 n 的函数，我们仅限于证明这方面的一个简单结果。象在定理1中那样，用 $X_r=X_r(G)$ 表示在 $G\in\Phi(n,P(edge)=p)$ 中 K^r 子图的数目，则

$$E(X_r)=\binom{n}{r}p^{\binom{r}{2}},$$

因为对于 K^r 的顶点集，我们有$\binom{n}{r}$种取法，而且若已选取了顶点集后，我们就没有选择$\binom{r}{2}$条边的余地了。令 $d=d(n,p)$是正实数，它满足

$$\binom{n}{d}p^{\binom{d}{2}}=1。$$

为了简单起见，我们记 $b=1/p$。很容易就可用斯特林公式检查

$$b^{d/2}<n$$

从而

$$d=\frac{2\log n}{\log b}+O(\log\log n)。\tag{13}$$

定理 12. 令 $0<p<1$ 是固定的，则几乎每个图 $G\in\Phi(n,P(edge)=p)$ 的团数是 $\lfloor d\rfloor$ 或 $\lceil d\rceil$。

证明： 此断言与下面的两个断言相同：

$P(X_r>0)\to 0$ 如果 $r\geqslant d+1$，

$P(X_r>0)\to 1$ 如果 $r\leqslant d-1$。

现在，如果 $r\geqslant d+1$，则依据(13)有

$$E(X_r)=\binom{n}{r}P^{\binom{r}{2}}\leqslant\frac{n}{r}p^r\binom{n}{r-1}p^{\binom{r-1}{2}}\leqslant\frac{n}{r}p^r\to 0,$$

故第一个断言是很显然的。

现在，令 $r\leqslant d-1$，我们使用(9)式来计算 X_r 的第二个矩，分别对于恰有 l 个公共顶点的 K^r 子图的对求和：

$$E(X_r^2)=\sum_{l=0}^{r}\binom{n}{r}\binom{r}{l}\binom{n-r}{r-l}p^{2\binom{r}{2}}=\binom{n}{r}^2p^{2\binom{r}{2}-\binom{l}{2}}。$$

因为

$$\mu_r^2=E(X_r)^2=\sum_{l=0}^{r}\binom{n}{r}\binom{n}{l}\binom{n-r}{r-l}p^{2\binom{r}{2}}=\binom{n}{r}^2p^{2\binom{r}{2}},$$

对于 $\sigma_r=\sigma(X_r)$，我们有

$$\frac{\sigma_r^2}{\mu_r^2}=\frac{E(X_r^2)}{\mu_r^2}-1\leqslant\sum_{l=2}^{r}\frac{\binom{r}{l}\binom{n-r}{r-l}}{\binom{n}{r}}p^{\binom{l}{r}}$$

$$\leqslant \sum_{l=2}^{r} r^{2l} n^{-l} b^{(l-1)l/2}。$$

现在记得$b^{d/2}<n$，故$b^{(l-1)l/2}<n^{l-1}$。因此，当$n\to\infty$时，有

$$\frac{\sigma_r^2}{\mu_r^2}\leqslant r^{2r+1}n^{-1}\to 0,$$

这就证明了第二个断言。 □

§5　哈密顿圈——图论工具的应用

在到目前为止的证明中，我们总是不同程度地采用了正面进攻的方式。我们所需要的图论知识，并不多于所涉及的概念的定义，而重点是在概率的应用上。这一节中，主要介绍 Pósa 的一个绝妙的结果。它的证明是基于图论的一个非平凡的结果。当然，对于在图论中概率方法的一个理想的应用，我们希望混合使用这四节中介绍的所有思路。这样，我们要用非平凡的图论结果打基础，并要利用概率论来获得有关针对这一问题而取的概率空间中的图的知识，然后，我们将选取一个适当的图，接着，将借助于各种有力的图论工具来对这个图加以改造。

容易看出，如果$\varepsilon>0$，则几乎所有的n阶和$M=\left\lfloor\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)n\log n\right\rfloor$级的图都是连通的，我们也可以证明，$n$阶和$M=\left\lfloor\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)n\log n\right\rfloor$级图中几乎没有一个是连通的(练习 13)。

特别是，几乎没有 n 阶和 $M=\left\lfloor\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)n\log n\right\rfloor$ 级的图包含哈密顿圈。令人迷惑不解的是，与用来保证连通性大致相等的边数已经保证了哈密顿圈的存在性。我们的下一个目标就是证明 Pósa 的这个绝妙的定理。

这个结果证明的基础是第Ⅳ章的定理 15。令 S 是一个图 H、中一条最长的 x_0—路，把 S 的各变换的各端点的集记作 L，用 N 表示 L 的顶点在 S 上的邻接顶点的集，记 $R=V(H)-L\cup N$. 于是第Ⅳ章的定理 15 表明，H 没有 $L-R$ 边。在这些定义中，我们只需要下列结果：如果 $|L|=l\leqslant|H|/3$，则存在两个分别含 l 和 $|H|-3l+1$ 个元素的不相交集，它们不被 H 的边联结。

为方便起见，我们将利用空间

$$\Phi\left(n,P(\text{edge})=p\right),\ p=\frac{c\log n}{n}.$$

我们从与定理4同一系统的一个简单的引理开始，用 D_t 表示 V 中不相交的子集的对 (X,Y) 的数目，使 $|X|=t$，$|Y|=n-1-3t$，而且 G 没有 $X—Y$ 边。

引理 13. 令 $c>3$ 和 $0<\gamma<\frac{1}{3}$ 都是常数，且令，$p=(c\log n)/n$，则在 $\Phi(n,P(\text{edge})=p)$ 中有

$$P(D_t>0 \text{ 对某个 } t,1\leqslant t\leqslant\gamma n)=O(n^{3-c})。$$

证明：记 $\beta=(c-3)/4c$，显然有

$$\sum_{t=1}^{\gamma n}E(D_t)=\sum_{t}^{\gamma n}\binom{n}{t}\binom{n-t}{n-3t}(1-p)^{t(n-3t)}$$

$$\leqslant n\binom{n-1}{2}(1-p)^{n-1}+\sum_{t=2}^{\beta n}\frac{1}{t!}n^{3t}(1-p)^{t(n-3t)}+$$

$$\sum_{t=\beta n+1}^{\gamma n}2^{2n}(1-p)^{t(n-3t)}。$$

现在，因为$(1-p)^n<n^{-c}$，我们有

$$n^3(1-p)^{n-3}<(1-p)^3n^{3-c},$$

并且，如果，$2\leqslant t\leqslant\beta n$，则有

$$n^{3t}(1-p)^{t(n-3t)}<n^{t(3-c(n-3t)/n)}\leqslant n^{3-c},$$

而如果$\beta n\leqslant t\leqslant\gamma n$，则有

$$2^{2n}(1-p)^{t(n-3t)}<n^{(2n/\log n)-c(n-3t)t/n}=$$

$$O(n^{-\beta(1-3\gamma)n})。$$

因此

$$\sum_{t=1}^{\gamma n}E(D_t)=O(n^{3-c}),$$

这蕴含引理的断言。 □

定理 14. 令 $c=(c\log^n)/n$，并考虑空间 $\Phi(n,P(\mathrm{edge})=p)$。如果 $c>3$ 而且 x 和 y 是任意两个顶点，则几乎每个图都包含一条从 x 到 y 的哈密顿路，如果 $c>9$，则几乎每个图都是哈密顿连通的：即每对不同的顶点都被一条哈密顿路联结起来。

证明：选取 $\gamma<\frac{1}{3}$，如果 $c>9$，则 $c\gamma>3$；如果 $c>3$，则 $c\gamma>1$。

我们对于 $\Phi(n,P(\mathrm{edge})=p)$中某些事件，引入下面的

记法，$\Phi(n, P(\text{edge})=p)$中的一个一般元素用 G 来表示，

$$D=\{D_t=0 \text{ 对每个 } t, 1\leqslant t\leqslant \lfloor \gamma n \rfloor\}.$$

$E(W,x)=\{G[W]$有其端点联结于 x 的一条最长路$\}$，
$E(W,x|w)=\{G[W]$中有一条在所有 w—路中最长的 w—路，并且这条路的端点联结于 $x\}$，

$F(x)=\{$每条包含 x 最长的路$\}$，

$H(W)=\{G[W]$有哈密顿路$\}$，

$H(x,y)=\{G$ 有哈密顿 x—y 路$\}$，

$HC=\{G$ 是哈密顿连通的$\}$，

事件 A 的补是 $\overline{A}$。

注意，依据引理 13，我们有

$$P(\overline{D})=1-P(D)=O(n^{c-3})。$$

令$|W|=n-2$ 或 $n-1$，我们来估计

$$P(D\cap \overline{E}(W,x)),$$

此处 $x\notin W$。令 $G\in D\cap \overline{E}(W,x)$，考虑 $G[W]$中的一条最长的路 $S=x_0x_1\cdots x_k$。（在 W 中引进某种序，我们容易完成，由 $G[W]$确定 S。）令 $L=L(G[W])$是 x_0—路 S 的各变换的各端点的集，而 M 象在第Ⅵ章定理 15 那样定义（应用于 $G[W]$）。记得，$|M|\geqslant|W|+1-3|L|$，且不存在 L—M 边，故也没有 L—$M\cup\{x\}$边。因为 $G\in D$ 和$|M\cup\{x\}|\geqslant n-3|L|$，我们求得$|L|\geqslant\gamma n$。因为 L 独立于与 x 关联的边被确定的，我们有

$$P(D\cap \overline{E}(W,x))\leqslant P(G\in D \text{ 而 } x \text{ 不联结于 } L(G[W]))\leqslant(1-p)^{\gamma n}<n^{-c\prime}。$$

完全同样的证明蕴含，当$|W|=n-2$ 或 $n-1$，$w\in W$，$x\notin W$

时，有

$$P(D\cap \overline{E}(W,x\cdot w))<n^{-c\gamma}。$$

现在注意，$\overline{F}(x)\subset\overline{E}(V-\{x\},x)$，故

$$P(\overline{H}(V))=P(\bigcup_{x\in V}\overline{F}(x))\leqslant P(D\cap\bigcup_{x\in V}\overline{F}(x))+P(\overline{D})$$

$$\leqslant\sum_{x\in V}P(D\cap\overline{F}(x))+P(\overline{D})\leqslant nP(D\cap\overline{E}(V-\{x\},x))$$

$$+P(\overline{D})\leqslant n^{1-c\gamma}+O(n^{3-c})。$$

这就证明了：如果 $c>3$，则几乎每个图都有哈密顿路。

现在，令 x 和 y 是两个不同的顶点，记 $W=V-\{x,y\}$。依据第一部分，有

$$P(\overline{H}(W))\leqslant 2n^{1-c\gamma}+O(n^{3-c})。$$

因为

$$H(x,y)\subset H(W)\cap E(x,y)\cap E(W,x|y),$$

我们有

$$P(\overline{H}(x,y))\leqslant P(\overline{H}(W))+P(D\cap\overline{E}(W,y))$$

$$+P(D\cap\overline{E}(W,x|y))+P(\overline{D})\leqslant 2n^{1-c\gamma}$$

$$+2n^{-c\gamma}+O(n^{c-3})。$$

因此，如果 $c>3$，则几乎每个图都包含从 x 到 y 的哈密顿路。

最后，因为对于无序对 (x,y)，$x\neq y$，存在 $\binom{n}{2}$ 种取法，有

$$P(\overline{HC})\leqslant\sum_{x\neq y}P(\overline{H}(x,y))\leqslant n^{3-c\gamma}+O(n^{2-c\gamma})。$$

这样，如果 $c>9$，则几乎每个图都是哈密顿连通的。 □

因为每个哈密顿连通图都是哈密顿图（包含哈密顿圈），特别是，依定理 8，我们有：如果 $c>9$，则在 $\mathcal{G}(n,\lfloor(c\log n)/n\rfloor$ 中几乎每个图都是哈密顿图。事实上，我们能看出，这个

证明的主要部分对于 $c>6$ 也给出了这个结果，独立于 Pôsa，Korshunov 证明了定理 14 的一个更强且本质是最好的可能的形式：对于每个 $c>1$，定理 14 的断言都成立。

〔练习〕

1. 令 $\vec{G}=(V,\vec{E})$ 是一个具有 m 条边但无自环的有向图，证明：V 可以划分成两个集 V_1 和 V_2 使 G 包含多于 $m/4$ 条从 V_1 到 V_2 的边。

2. 给定一个整数 $k\geqslant 2$ 和图 G，用 $P^{(k)}(G)$ 表示 G 的边的最小数目，使这些边删除后产生一个 k—部图。证明：如果 $G=G(n,m)$，则

$$p^{(k)}(G)\leqslant m\left\{l\binom{r+1}{2}+(k-l)\binom{r}{2}\right\}\binom{n}{2}^{-1},$$

此处，$n=kr+l,0\leqslant l<k$，并进一步证明：

$$m-kp^{(k)}(G)\geqslant\frac{k-1}{n-1}m。$$

〔提示：考虑具有顶点集 $V(G)$ 的形如 $H=lK^{r+1}\cup(k-l)K^r$ 的所有图，注意，G 和 H 的公共边的期望值是

$e(G)e(H)/e(K^n)$〕。

3. 证明：存在 n 阶竞赛图（参看第Ⅰ章练习 12），它包含至少 $n!2^{-n+1}$ 条有向哈密顿路。

4. 证明：存在不包含 $K(s,t)$ 的 n 阶和

$\left[\frac{1}{2}(1-(1/s!t!))n^{2-(s+t-2)/(st-1)}\right]$ 级的图。

5. 给定 $2\leqslant s\leqslant n$，令 d 是最大的整数，使对于它存在一

个没有 $K_3(s,s,s)$ 的 $G_3(n,n,n)$，在其中，每个顶点由至少 d 条边与另外两个类中的每一个联结。证明 d 的一个下界。

6. 使用定理 3 证明：如果 $r>2, 0<\varepsilon<\frac{1}{2}(r-1)^{-2}$ 和

$$d_r^* > -\frac{2}{\log(2(r-1)^2\varepsilon)},$$

则对于每个充分大的 n，都存在不包含 $K_r(t)$ 的图 $G(n,m)$，此处 $m \geqslant \{(r-2)/2(r-1)+\varepsilon\}n^2$，而 $t=\lfloor d_r^*\log n\rfloor$。（注意，这证明了第Ⅳ章的定理 20 在本质上是最好的）。

7. 证明：一个给定的顶点度为 1 在大约 $\Phi(n,n)$ 中的 $2/e^2$ 个图中成立。

在练习 8—13 中使用模型 $\Phi(n, P(edge)=p)$，并假设 $0<p<1$ 是固定的。在练习 14—19 中使用同一个模型，但 p 象说明的那样随 n 变化。

8. 证明：对于 $\varepsilon>0$，a.e.图至少有 $\frac{1}{2}(p-\varepsilon)n^2$ 条边，而至多有 $\frac{1}{2}(p+\varepsilon)n^2$ 条边。

9. 给出 a.e. 图色数的一个下界。

10. 证明：a.e.图都包含阶至少为 $\log n/\log(1/p)$ 的完全图。

11. 证明：a.e.图 G 都满足

$$\delta(G)=\lambda(G)=\chi(G)=pn-(2pqn\log n)^{1/2}+o(n\log n)^{1/2}，$$
此处 $q=1-p$。

12. 估计 t 的最大值，对于这个 t，a.e.图包含生成图 $K^{(t)}=K(t,t)$，对于

$$K_r(t)=K(t,\cdots,t),$$

估计相应的值。

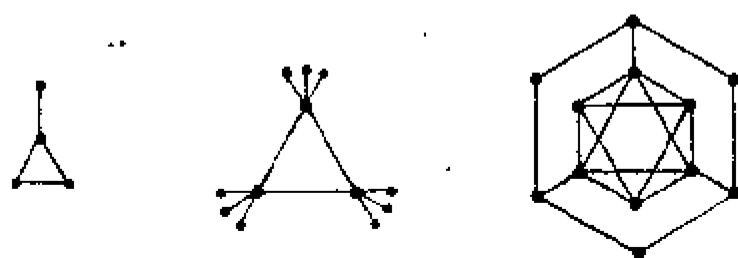
13. 令 $0<c<1$。证明：a.e.图有下面的性质：对于有 $k=\lfloor c\log_2 n\rfloor$ 个顶点的每个集 W，对 W 的每个子集 Z，都存在顶点 x_z，使 x_z 与 Z 中的每个顶点联结，但不与 $W-Z$ 中任何顶点联结，注意，对于 $c=1$，甚至不可能求得一个与 W 不相交的 2^k 个顶点的集。〔提示：改进定理 7 的证明。〕

14. 证明：$(\log n)/n$ 是对于连通性的强阈函数，即，如果 $\varepsilon>0$ 和 $p=((1-\varepsilon)\log n)/n$，则几乎没有一个图是连通的；而如果 $\varepsilon>0$ 和 $p=((1+\varepsilon)\log n)/n$，则 a.e. 图都是连通的。

15.⁺ 加强前面的结果如下：如果 $p=(\log n)/n+(2x/n)$，则 G 连通的概率是 $e^{-e^{-2x}}$。〔首先证明：a.e.图由一个分支和一些孤立点组成。〕

16. 令 $p=((\log n)/n)+(c(n)/n)$，此处 $c(n)\longrightarrow\infty$ 可以任意慢。证明：a.e.图 G 都包含 1—因子。〔使用 Tutte 定理，即第Ⅱ章定理 12，不必理会各分支的奇偶性。〕

17. 证明：$1/n$ 是对于图Ⅶ.1 中的 F_1 的阈函数，即如果 $pn\longrightarrow 0$，则几乎没有图包含 F_1；而如果 $pn\longrightarrow\infty$，则 a.e., 图包含 F_1。



图Ⅶ.1.图 F_1、F_2 和 F_3。

18. 图Ⅶ.1中的F_2的阈函数是什么？

19. 令$\varepsilon>0$，证明：如果$p=n^{-(1/2)-\varepsilon}$，则几乎没有图包含图Ⅶ.1中的F_3；但是，如果$p=n^{-(1/2)+\varepsilon}$，则$a.e.$图都包含F_3。〔寻求适当的图F_3^*，它有平均度$2+\varepsilon$。〕

20.⁻考虑随机有向图，在其中，所有的边都是独立地选取的，并且所有边均有相等的概率p。证明：存在这样的常数c，如果$p=c((\log n)/n)^{1/2}$，则$a.e.$有向图都包含有向哈密顿图。〔提示：两条边$\overrightarrow{ab}$和$\overrightarrow{ba}$都含在图中的概率是多少？把定理14应用于由这些双重边构成的随机图。〕

21.⁻注意练习20提出的解给出两个具有同样基础（非有向的）边集的有向哈密顿图。证明：对于$p=(1-\varepsilon)((\log n)/n)^{1/2}$几乎没有有向图包含这样一对哈密顿图。

22. 证明：至少存在$(2^n/n!)+0(2^n/n!)$个n阶的不同构的图。〔提示：在$\Phi(n,p(edge)=\frac{1}{2})$中$a.e.$图都有平凡的自同构群；对于自同构群，参看$p.223$。〕

注

用概率方法证明的第一个组合结果大概是练习3的断言，其证明是T.Szele, Combinatorial investigations concerning directed compleet graphs（匈牙利文）, Mat.Fiz. Lapok 50(1943) 223—256；德译文请参看Kombinatorische Untersuchugen über gerichtete vollstandige Graphen, publ.Math. Debrecen 13(1966) 145—168。但是，真正促进随机图的应用的第一批论文是P.Erdős的两篇文章，Graph theory and probability, Canad.J.Math. 11 (1959) 34—38，它包含定理6；Graph theory and Probability Ⅱ, Canad.J.Math. 13 (1961) 346—352，它包含定理6中给出的R(3,t)的下界。

我们在定理 7 之后叙述的有关一阶语句的结果属于 R.Fagin, Probabilities on finite models.J.Symb.Logic 41 (1976) 50—58。

随机图发展中的基本文章是 P.Erdős and A.Renyi ,On the evolution of random graphs,Publ.Math.Inst.Hungar.Acad.Sci.5 (1960) 17—61。这篇文章包含了稀疏随机图的细详讨论，除了别的内容外，还涉及它们的分支的分布和小子图的出现（定理 11）。

与定理 12 有关的最强的结果属于 B.Bollobás and P.Erdős, Cliques in random graphs,Math.Proc.Cambridge Phil.Soc.80 (1976) 419—427。Pósa 定理（定理 14）见于 L.Posa, Discrete Math.14 (1976) 359—364, 它的更强的形式见于 A.D.Korshunov, Solution of a problem of Erdős and Renyi, on Hamilton cycles in nonoriented graphs, Soviet Mat. Doklady 17 (1976) 760—764。

包含 Chebyshev 不等式和用 Poisson 分布逼近二项式分布在内的概率论的经典结果,请读者参看, W.Feller An Introduction to Probability theory and Its Applications, Vol.1 3rd ed.,Wiley,New York, 1974, 和 A.Renyi, Foundations of Probibility,Holden—Day,San Francisco, 1970, 特别是有关 De Moivre—laplace 公式的一些章节。

随机图和其它组合结构在下列书中进行了深入的探讨。P.Erdős and J. Spencer, Probabilistic Methods in Combinatorics, Academic Press, New York and London, 1974.

第Ⅷ章　图和群

在本章中，我们将考查图和群之间的一些相互作用。有关群的一些问题可以使用图来很好地解答，虽然在图这方面仅仅是直观的和计算的一种工具，但是，它的应用确实使表示更加明确并使问题更容易处理。这个方法在理论和实际两方面都是有益的：它既帮助我们证明有关群的一般结果，也帮助我们证明有关特别群的特殊结果。第一节中的有关Cayley和Schreier图解的内容充分地显示了这二方面的特征，这一节中，对于群的表示作了非正式的叙述。

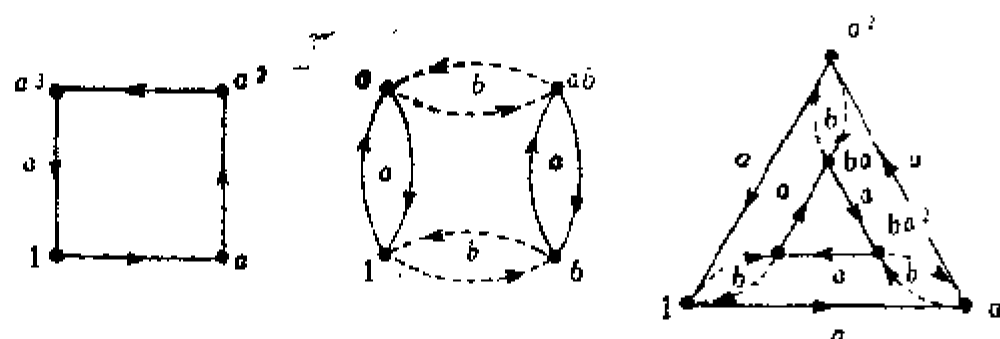
如果知道一个图类的每个元素都有特别令人愉快的对称性质，换言之，如果它有大的自同构群，那么我们常常可以利用这一性质来获得有关这个类的附加知识，在某些情形中，这些附加知识能使我们几乎完全决定这个类。第二节说明，我们怎样利用邻接矩阵的性质来完成这一工作。

我们在§3中将看到，标定图的某些类是容易计数的。其它的计数问题，如计算图的同构类，引导我们去研究置换群的轨道。这一节的精彩部分是计数这种轨道的基本定理，即Polya定理。

§1　Cayley和Schreier图解

令A是由$a,b,\cdots$生成的群，A的图也称为A的关于这些生成元的Cayler**图解**，是一个有向重图，其边用生成元

着色：从 x 到 y 存在一条用一个生成元 g 着色的边当且仅当 $xg=y$。为了说明这个概念，在图Ⅶ.1 中，我们给出了三个小群的 Cayley 图解。



图Ⅶ.1. 三个群的 Cayley 图解：（i）由 a 生成的循环群 $C4$，（ii）具有生成元 a，b 的 Klein 4—群，（ii）具有生成元 $a=(123)$ 和 $b=(12)$ 的对称群 $S3$。

Cayley 图解是正则的，而它的着色也是正则的：即对于每个顶点 x 和每个生成元 g（颜色），恰好存在一条始于 x 的具有颜色 g 的边也恰好存在一条终止于 x 的具有颜色 y 的边，并且，从 x 到任意别的顶点 y 至多有一条边。如果我们已知一个群的 Cayley 图解，则我们容易回答有关生成元的问题。在 S_3 中，元素 aba^2b 等于什么？它是始于 1 的一条有向通道的终点，此通道的第一条边有颜色 a，第二条边有颜色 b，第三条边 a，第四边 a，最后第五边有颜色 b。沿着图 1 的第三个图中的这条通道，我们发现 $aba^2b=a^2$。一般地，表示为某些生成元之积的两个元素相等当且仅当对应的始于 1 的通道终止于同一个顶点。

Schreier 图解是由 Cayley 图解稍加推广得到的。这次，我们有群 A，A 的元素的一个集 S 和 A 的一个子群 B。

A 的模 B 的 Schreier 图解描述了 S 的元素作用在 B 的右陪集上的效果；它是一个有向重图，其顶点是 B 的右陪集，其中，从陪集 H 向陪集 K 有一条有颜色 $s\in S$ 的边当且仅当 $Hs=K$。（这样，一个 Cayley 图解是一个模 $B=\{1\}$ 的 Schreier 图解。）在大多数情形中，S 被选作生成元的一个集，或被选作与 B 一起生成 A 的一个集。需要注意的是如果 A 是$\{1,2,3,4\}$上的对称群，B 是使 1 不动的那些元素构成的子群，$S=\{a\}$，而 $a=(1234)$，则 A 的模 B 的 Schreier 图解不用重新画，它就是图Ⅷ.1 中的第一个图，即 C_4 的 Cayley 图解。我们再注意一下，对于每个顶点 H 和每种颜色 $g\in S$，恰有一条着色 g 的边始于 H，而且，恰有一条着色 g 的边终止于 H，但是，某些边可以是自环，即它们可以开始和终止于同一陪集，并且可以有不同颜色的许多边联结两个顶点。

群的图解所能表示的有关群的任何知识都可以用代数方法表示，但是，代数方法的缺点是，用一个图解在几乎瞬间就能表达的内容，它却需要用许多行文字才能说明白。当我们要用于解答一个具体问题时，这些图解是特别有用的。此外，图解方法所用的纯粹机械的技巧对直接用于计算机也是很理想的。自从快速计算机出现以后，许多用其它方法没希望解决的问题已经用这种方法解决了。

当试图解决用群的表示给出有关群的问题时，群的图解是特别有用的。为方便读者起见，我们回忆一下有关群表示的基本事实。我们打算自始至终进行直观的描述而不作严格的论述，有兴趣的读者可以自己补足细节，或者参考该题目的

某些专门的著作。用记号a，b，c，…构成的一个**字** W 是一个型如

$$ba^{-1}1ccaa^{-1}b^{-1}a$$

的有限序列，空序列记作1。如果我们可以从一个字重复地用1（空字）代替 xx^{-1} 或 $x^{-1}x$ 或者用相反的代入而得到另一个字，我们就说这两个字是**等价的**。这样，$abb^{-1}a^{-1}c^{-1}$ 和 $cc^{-1}c^{-1}dd^{-1}$ 都等价于 c^{-1}。实际上，我们将用同样的记号来记一个字和它所在的等价类，故我们简记作 $abb^{-1}a^{-1}c^{-1}=cc^{-1}c^{-1}dd^{-1}=c^{-1}$。并且，为了简单起见，记 $abbc^{-1}c^{-1}c^{-1}=ab^2c^{-3}$，等等。如果乘法定义为并列，如$(ab^{-1}c)(c^{-1}ba)=ab^{-1}cc^{-1}ba=a^2$，则字（的等价类）构成一个群。显然，$a^{-1}$ 是 a 的逆元素并且$(a^{-1}b^{-1}c)^{-1}=c^{-1}ba$.这个群是由$a,b,c,\cdots$生成的**自由群**，并把这个群记作$\langle a,b,c,\cdots\rangle$。

令 R_μ，R_ν，…是用记号 $a,b,c,\cdots$构成的字，$F=\langle a,b,c,\cdots\rangle$，并令 K 是由 $R_\mu,R_\nu,\cdots$ 生成的 F 的正规子群。则商群 $A=F/K$ 称为是由 $a,b,c,\cdots$和**关系子** R_μ，R_ν，…生成的群，记作 $A=\langle a,b,c,\cdots|R_\mu,R_\nu,\cdots\rangle$。

我们再一次用一个字来表示它所在的等价类，并用等号表示等价。群表示经常用定义关系来写，而不是用更正式的关系子来写。例如，$\langle a,b|a^2=b^3\rangle$表示群$\langle a,b|a^2b^{-3}\rangle$。如果在一个群的表示中只有有限多个生成元和关系子，就说这个群被**有限表示**。显而易见，在 A 中的两个字 W_1 和 W_2 是等价的当且仅当我们可以用 W_1 来重复插入或删除 aa^{-1}，$a^{-1}a$，bb^{-1}，…，关系子 $R_\mu,R_\nu,\cdots$和它们的逆 R_μ^{-1}，R_ν^{-1}，…而得到 W_2。例如，注意，在 $A=\langle a,b|a^3b,b^3,a^4\rangle$中，

我们有 $a=aa^3b=a^4b=b$，因此，$1=a^3b(b^3)^{-1}=a=b$，故 A 是1阶平凡群。

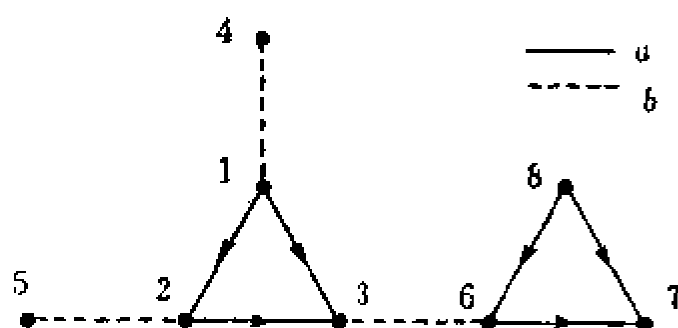
当遇到用定义关系来给出的群时，甚至从上面的平凡例子也可以看出我们将遇到的困难。但是，用群表示定义的群自然而然地在数学的各个领域、特别是在纽结理论、拓扑和几何中出现，故我们必须尽力克服这些困难。关于群表示的基本问题是 Max Dehn 在1911年提出的，这些问题要求用一个一般的和有效的方法在有限步内判定：(i) 两个给定的字是否表示同样的群元素（字问题），(ii) 它们是不是表示一对共轭元素（共轭性问题），(iii)两个有限表示的群是否同构（同构问题）。所有这些问题都已被证明是逻辑问题，且不能用一般方法来解决。这些问题的显式解总是基于某种特殊的表示，并常常利用群的图解。（Dehn 本人就特别热衷于群的图解。）

令 $A=\langle a,b,\cdots|R_\mu, R_\nu, \cdots\rangle$，我们将试图对生成元 $a,b,\cdots$ 构造 A 的 Cayley 图解。假如我们已经有了 Cayley 图解，则对于这个表示，我们显然可以解答字问题。

Cayley 图解有下列两个性质：(*a*)各(有向)边可用 a, $b,\cdots$来正则着色，即对于每个顶点 x 和生成元 g，恰好存在一条始于 x 且有颜色 g 的边，也恰有一条终止于 x 且有颜色 g 的边，(*b*) 每个关系在每个顶点处满足，即如果 x 是一个顶点而 R_ν 是一个关系子，则从 x 开始的对应于 R_ν 的通道终止于 x。那末，我们怎样设法来寻求 Cayley 图解呢？我们试图使(*a*)和(*b*)满足，并且非绝对必要时我们不等同两个顶点。这样，在每一步我们可以取一个新的顶点和一条向

着它的（或背向它的）边。如果(b)或(a)迫使我们必须等同两个顶点时，我们就等同两个顶点。如果这个过程终止，我们就得到了 Cayley 图解。注意，直到最后我们才能知道不同的顶点表示不同的群元素。

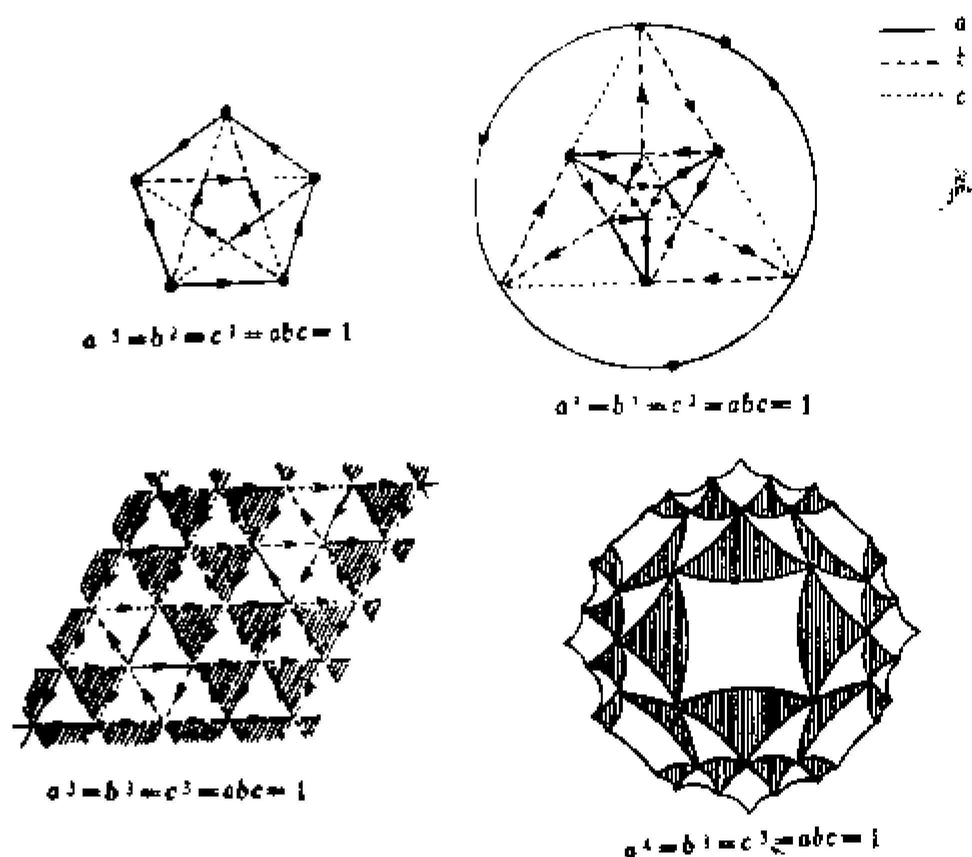
作为一个例子，我们看看怎样来得 $A=\langle a,b\,|\,a^3=b^3=(ab)^2=1\rangle$的 Cayley 图解．我们用一条无向边来代替对应于b的一组双重边，这就使Cayley 图解变成了一个图．我们从单位元素和对应于$a^3=1$的三角形 123 开始，为了简单起见，我们用数 1,2,…表示顶点，保留 1 来记单位元素。对每个顶点 1、2 和 3 必有一条以b着色的边从该顶点开始，这就给出顶点 4、5 和 6，现在$a^3=1$必在顶点 6处满足，这就给出另一个三角形，比如说 678，它的边都用a来着色，如图Ⅶ．2 所示．在这一步，我们也许想引进关系$(ab)^2=abab=1$．在 8 处检查它，比如说，我们看到通道 86314 必终止于 8，故到目前为止由 8 和 4 表示的两个顶点必须重合．下一步，我们在 7 处检查$abab=1$：通道 $7(8\equiv4)125$必终止于7，故 5 和 7 是同一个顶点。尚待检查的只是我们得到的图解能否满足(a)和(b)，故它是问题中的群的 Cayley 图解。实际上，这个图解就是图Ⅶ．1 中的第三图，故该群是S_3。



图Ⅶ.2．Cayley 图解的构造。

对于 $p\geqslant q\geqslant r\geqslant 2$，用$(p,\ q,\ r)$表示群$\langle a,\ b,\ c\,|\,a^p=$

$b^q=c^r=abc=1>$。给 p，q，r 以特定的值，稍加努力读者就能得到关于生成元 a,b 和 c 的群 (p,q,r) 的 Cayley 图解．图Ⅶ.3 给出了一些这样的图解。



图Ⅶ.3．一些 Cayley 图解．阴影部分对应于 $abc=1$。

上述各个图解表明了与分格的某种联系，使用 Cayley 图解的妙处在于，我们可以很好地利用这种联系。事实上，稍微熟悉球面、欧几里得平面和双曲平面的分格的读者，都能很容易地证明出下面的结果。

定理 1． 如果 $(1/p)+(1/q)+(1/r)>1$，则群 (p,q,r) 是有限的并有 $2s$ 阶，此处，$1/s=(1/p)+(1/q)+(1/r)-1$．其 Cayley 图解是球面的一个分格（如图Ⅶ．3 中的前两个图）。

如果$(1/p)+(1/q)+(1/r)\leqslant 1$，则群$(p,q,r)$是无限的。如果等号成立，Cayley 图解是欧几里得平面的一个分格，否则即是双曲平面的一个分格（如图 Ⅶ.3 中的后两个图）。 □

前面已经提到过，用群表示来给出的群常常出现于纽结理论中。特别是，Dehn 指明了一个（驯顺的）**纽结的群**（即去掉该纽结之后 R^3 的基本群）的一种表示如何由该纽结在平面上的一个投影看出。纽结的投影构成平面上某些有界域的边界，这些区域中的每一个对应于一个生成元（单位元素对应于无界区域），而每个交叉点对应于一个关系子，这些关系子的一般形式容易从图 Ⅶ.4 中的两个例子看出（事实上，熟悉代数拓扑的读者容易证明这个表示的正确性）。三叶形纽结(或三叶纽结)的群是$\langle a,\ b,\ c, d \mid ad^{-1}b,\ cd^{-1}a,\ cbd^{-1}\rangle$，而八纽结的图形的群是$\langle a,\ b,\ c,\ d,\ e \mid ab^{-1}c,\ ad^{-1}eb^{-1},\ ed^{-1}cb^{-1},\ acd^{-1}\rangle$。

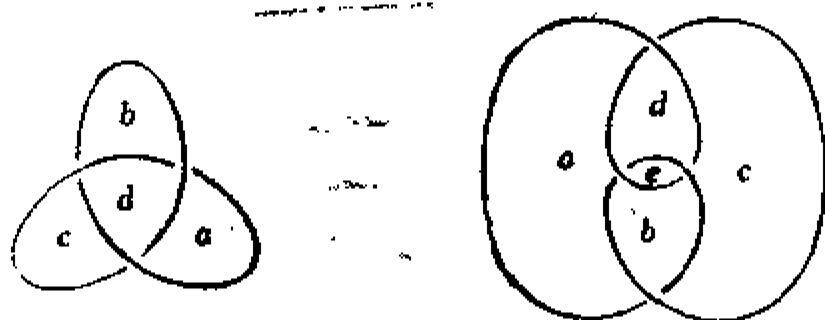


图 Ⅶ.4. 三叶形纽结和八纽结的图形。

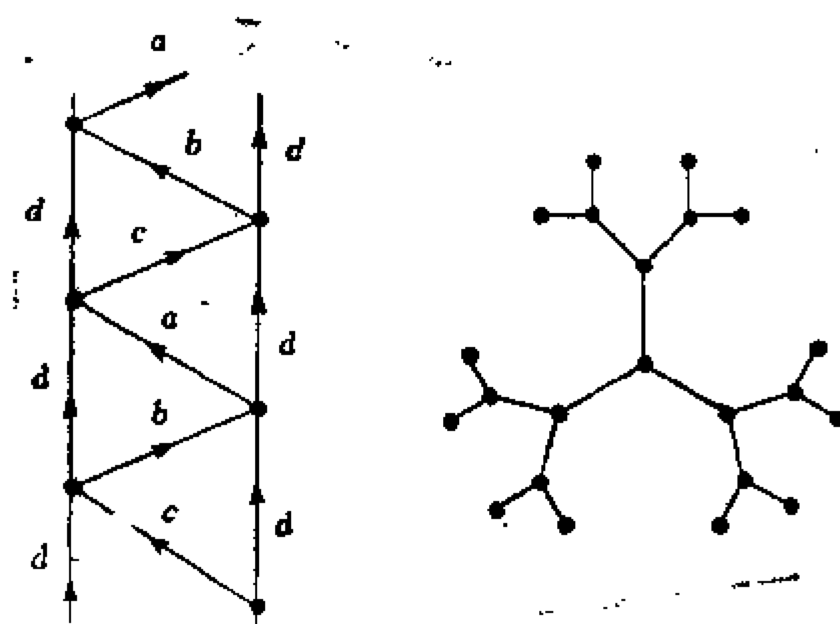
当然，在着手研究群以前先要简化其表示，例如，$cbd^{-1}=1$ 意味着 $d=cb$ 或 $bd^{-1}c=1$。这样，三叶纽结的群是

$$\langle a,\ b,\ c,\ d \mid ad^{-1}b,\ bd^{-1}c,\ cd^{-1}a\rangle$$

或者等价地是

$\langle a,b,c \mid cb=ba=ac \rangle$。

我们请读者检查，这个群的 Cayley 图解是由无限多个在图Ⅷ．5 中给出的梯子组成的（练习 4）。将这些梯子垂直放置，并沿垂直边将这些梯子粘结在一起，每一条新的垂直边由等同三个梯子的各一条垂直边得到，使得从上往下看时成为一棵无限三次树，其中每一条边是一个梯子在水平面上的投影（如图Ⅷ．5 右边）†。



图Ⅷ.5．三叶形纽结的 Cayley 图解的组成部分．

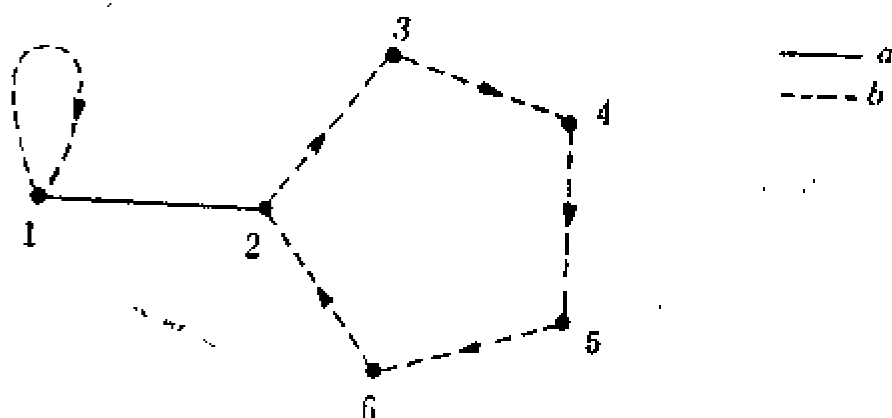
假如已经得到了 Cayley 图解，可以看出我们感兴趣的性质。对于这个群来说，这种方法不是太经济的，但是，Dehn 正是用此方法在 1910 年证明了三叶形纽结的群不是一个圆周的群，后者是无限循环的。

Schreier 图解可用类似于 Cayley 图解的方法来构造．

† 原文在此说明的不很清楚，故译文稍有改动．—校注．

先确定一个子群的 Schreier 图解常常是更便利的，为了表明这一点，我们研究另一个例子，这个例子也是 Dehn 给出的。群

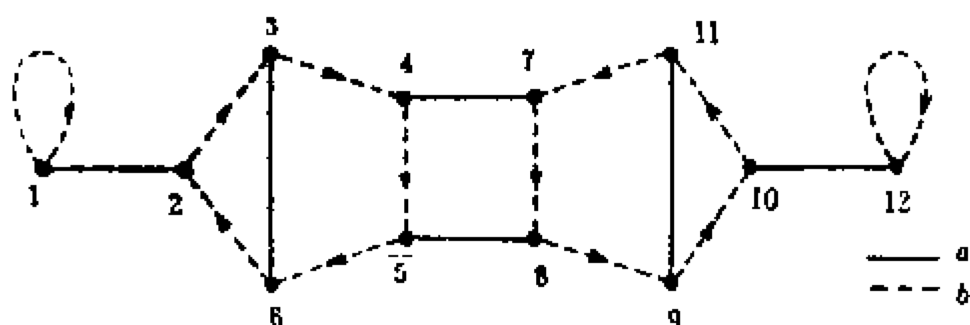
$A=\langle a,b\,|\,a^2=b^5=(ba)^3=1\rangle$ 是什么样的一个群？我们构造由 b 生成的子群 B 的陪集的 Schreier 图解。象前面那样，对 B 我们取顶点 1，然后，试图构造一个条件 (a) 和 (b) 所允许的尽可能大的图（前面说过 (a) 要求着色是正则的，(b) 要求每个定义关系在每个顶点处得到满足）。但是，对这种情形，还需要另外一个条件：因为 $Bb=B$，从 1 开始的着色 b 的边必终止于 1（故它是一个自环）。这样，在两步之后，我们得到了图Ⅷ.6 所示的图（因为 $a^2=1$，用 a 着色的边不是有向的）。



图Ⅷ.6. A 的模 B 的 Schreier 图解的最初部分。

现在，我们检查条件：在顶点 6 处，$bababa=1$ 成立。通道 $babab$ 从 6 到 3，故必存在一条从 3 到 6 的着色 a 的边。为了得到两条分别始于 4 和 5 以 a 着色的边，我们取顶点 7 和 8，以及着色 a 的边 47 和 58。下一步我们在顶点 7 处检查条件 $ab^{-1}ab^{-1}ab^{-1}=1$，它与 $(ba)^3=1$ 相同，从而发现从 7 到 8 存在一条着色 b 的边。为了在 7 处满足 $b^5=1$，我

们取三个新顶点 9，10 和 11。在 11 处检查 $(ba)^3=1$，我们发现存在一条从 9 到 11 的着色 a 的边，至此，我们差不多已经完成了我们的工作，但是，还没有始于 10 的着色 a 的边，故我们取一个新顶点 12，并用一条着色 a 的边与 10 联结。在顶点 12 处条件 $ab^{-1}ab^{-1}ab^{-1}=1$ 告诉我们什么呢？因始于 12 的通道 $ab^{-1}ab^{-1}a$ 必终止于 12，故必有一条着色 b 的边始于 12 且终止于 12，这给出了图Ⅶ.7.



图Ⅶ.7.完成了的 Schreier 图解。

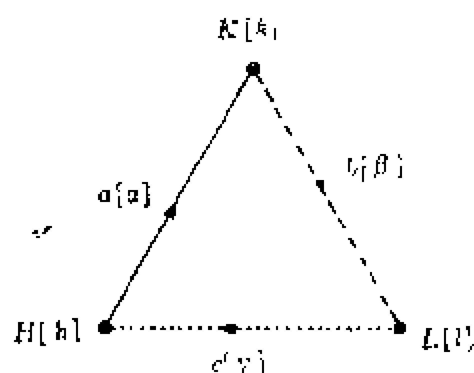
这就是我们寻找的 Schreier 图解，因为其中的着色显然是正则的，并容易检查在每个顶点处每个定义关系是否都得到满足。事实上，$a^2=1$ 和 $b^5=1$ 显然是满足的，因为依构造，在 6 处 $(ba)^3=1$ 成立，故它在通道 621236 的每个顶点处也成立，等等。

上述详细而繁琐的解释也许给人一个错误的印象，事实上，真正画在纸上或黑板上时，上述过程是很快并且一眼就能看明白，我们希望读者自己来证实这一点。

Schreier 图解肯定能告诉我们 B 的指数，它就是顶点的数目，事实上，我们常常为了确定一个子群的指数而用计算机来构造 Schreier 图解。在某些情形中，比如在上面的例子中，它告诉我们的东西要多得多，就本质来说，Schreier

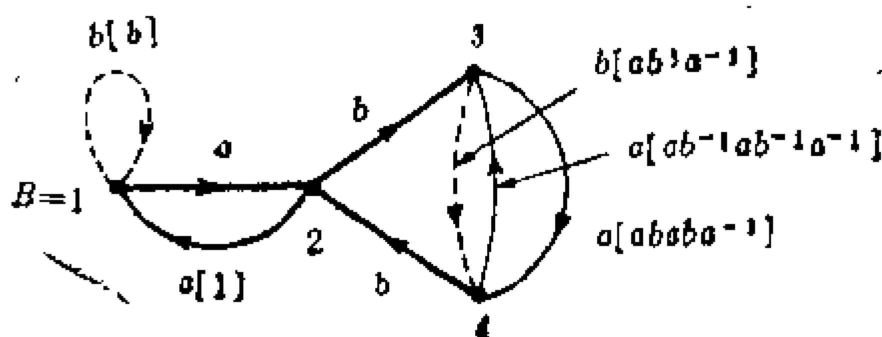
图解是一种速记法，它是用 B 的各右陪集的一个置换群来速记 A 的一个表示。在上面的例子中，$a \longrightarrow (12)(36)(47)(58)(911)(1012)$ 和 $b \longrightarrow (1)(23456)(7891011)(12)$。因为对应于 b 的置换的阶为 5，即 b 在 A 中的阶，我们能看出 A 是一个 $5\times 12=60$ 阶的群，而且实际上它同构于 A_5，即五个符号上的交错群。

如果我们希望 Schreier 图解传达更多的信息，则我们要固定各陪集的某些代表，并仍关注生成元作用在这些代表上的效果。我们用其代表来**装饰**每个陪集，即如果 H 被〔h〕装饰，则 $H=Bh$。现在，如果存在一条从 $H=Bh$ 到 $K=Bk$ 的着色 a 的边，且设 $ha=\alpha k$，我们就用〔α〕来装饰这条边，因为 $K=Bk=Ha=Bha$，故我们看出，$\alpha\in B$，即这些边用 B 的元素装饰。并且，如果 H、K 和 L 用 h、k、l 装饰，并存在用 a、b、c 着色且用〔α〕、〔β〕、〔γ〕装饰的联结它们的边，如图 Ⅷ.8 所示，则 $habc=\alpha kbc=\alpha\beta lc=\alpha\beta\gamma h$。特别是，如果 $h=1$，我们有 $abc=\alpha\beta\gamma$。当然，类似的断言对于始于并终止于 B 的任意通道都成立：颜色的积等于装饰的积。



图Ⅷ.8．带装饰的 Schreier 图解中的一个圈。

装饰顶点和边的最简单的方法之一是应用生成树。取 Schreier 图解的一棵生成树，用 1 装饰子群 B 本身（1 是单位元），也用 1 来装饰这个生成树的各边。这就确定了每个顶



图Ⅶ.9. 由一棵生成树导出的装饰。

点（即陪集）和每条边的装饰。事实上，对于每个顶点 H，这个生成树包含唯一的一条从 B 到 H 的路，显然，H 必须用对应于此路的积 $abc\cdots$ 来装饰。这些陪集代表称为对 B 构成了一个模 A Schreier 系。一条弦 HK，即不在树中的边的装饰是什么呢？依据上面的说明，它是在 B—H 路、边 HK 和 K—B 路上的各颜色之积，如图Ⅶ.9 所示。

因为 B 的每个元素都是在 Schreier 图解中从 B 到 B 的一条闭通道上的各颜色之积，各条弦的装饰就生成 B。这样，由 Schreier 图解我们可以不依靠 A 的构造而看出 B 的生成元的集。

定理 2. A 的子群 B 由各条弦的装饰生成。

特别是，在图Ⅶ.9 中的子群 B 是由 b, ab^3a^{-1}, $ab^{-1}ab^{-1}a^{-1}$ 和 $ababa^{-1}$ 生成。 □

如果我们有 A 的一个表示，寻求 B 的一个表示同样很简单。这可由 Reidemeister—Schreier **重写过程**得到，我们来迅速而粗略地对它作一个描述。这个表示的生成元是生成树的弦，为了区别有同样颜色的各条弦，对于着色 c 而始

于 i 的边我们写作 c_i。对于每个顶点 i 和每个关系子 R_μ，用 R_μ^i 表示始于 i 的由 R_μ 给定的通道（的字），这条通道表示作 c_i 的积，比如说 $R_\mu^i = b_i c_j \cdots$。读者可以很容易地补齐下面很好的结果的证明中省略的细节，这个结果属于 Reidemeister 和 Schreier。

定理 3. 子群 B 有一个表示：

$\langle a_1, b_1, \cdots, a_2, b_2, \cdots | R_\mu^1, R_\nu^1, \cdots, R_\mu^2, R_\nu^2, \cdots \rangle$。 □

现在，如果我们想保持 B 的这个表示与 A 原来的表示之间的联系，只要简单地把 c_i 看作始于 i 且着色 c 的边的装饰就可以了。

如果 A 是一个自由群，它的表示不包含关系，因此，B 的上面的表示也不包含关系，故 B 也是一个自由群。这是 Nielsen 和 Schreier 的一个基本结果。

定理 4. 一个自由群的一个子群是自由的，并且，如果 A 是一个秩为 k（即有 k 个自由生成元）的自由群而 B 是指数为 n 的一个子群，则 B 的秩为 $(k-1)n+1$。

证明： 在定理 3 中给出的 B 的表示是在 Schreier 图解的弦的集上的一个自由表示，总共存在 kn 条边，而其中有 $n-1$ 条是树的边，因此存在 $(k-1)n+1$ 条弦。 □

注意到下面的事实是很有趣的：定理 3 蕴含自由群的秩是完全确定的。事实上，假设 A 是由 a，b，…自由生成的，则具有一个选定的顶点（对应于一个子群）和正则着色（用 a，b，…）的每个有向重图都是 A 的某个子群 B 的 Schreier

图解，因为不存在需要被满足的关系。因此，指数为 n 的各子群与各 n 阶正则着色重图是1—1对应的，特别是如果 A 有 $k\geqslant 2$ 个生成元，则它有 2^k-1 个指数为2的子群，因为存在 2^k 个用 k 种颜色正则着色的2阶重图，但是，这 2^k 个中有一个是不连通的。指数为2的子群的数目显然与取这个群的什么表示无关，故 k 由 A 确定。

§2 邻接矩阵的应用

回想第Ⅱ章§3中定义，图 G 的顶点空间 $C_0(G)$ 是从 $V(G)$ 到 $\mathbf{C}$ 的所有函数组成的复向量空间。我们仍取 $V(G)=\{v_1, \cdots v_n\}$，故 $\dim C_0(G)=n$，并把 $C_0(G)$ 的元素写成形式 $\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}x_iv_i$ 或 $\mathbf{x}=(x_i)_1^n$，此处 x_i 是 X 在 v_i 处的值，也称为**在 v_i 处的权**。给空间 $C_0(G)$ 以系于基 $(v_i)_1^n$ 的自然内积：$\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$。

我们将重点考虑 G 的邻接矩阵 $A=(a_{ij})$，它是一个0—1矩阵，而 $a_{ij}=1$ 当且仅当 v_iv_j 是一条边。通常，我们把 A 等同于 $C_0(G)$ 的一个线性自同态。首先，我们回忆线性代数的一些简单事实。矩阵 A 是**实的**和**对称的**，故它是**赫密特矩阵**，即 $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle=\langle\mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle$。因此它的**数值范围**

$$V(A)=\{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle: \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle=1\}$$

是实直线上的闭区间。A 的特征值都是实的，比如说 $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_n$，而 $V(A)$ 就是区间 $[\lambda_n, \lambda_1]$（为了简单起见，A 的一个

特征值称为 G 的一个特征值）。我们把最大的特征值 λ_1 记作 $\lambda_{max}(G)$，而最小的特征值 λ_t 记作 $\lambda_{min}(G)$。内积空间 $C_0(G)$ 有一个由 Δ 的特征向量组成的标准正交基。特别是，如果用 $m(\lambda)$ 表示特征值 λ 的（几何的或代数的）重数，则 $\sum_{i=1}^{t} m(\lambda_i)=n$。这些说明能使我们导出特征值的某些性质。

定理 5. 令 G 是具有邻接矩阵 A 的一个 n 阶连通图。

(i) G 的每个特征值 λ 满足 $|\lambda|\leqslant\Delta=\Delta(G)$。

(ii) Δ 是 G 的一个特征值当且仅当 G 是正则的，如果 Δ 是一个特征值，则 $m(\Delta)=1$。

(iii) 如果 $-\Delta$ 是 G 的一个特征值，则 G 是正则的二部图。

(iv) 如果 G 是二部图，而 λ 是 G 的一个特征值，则 $-\lambda$ 也是 G 的一个特征值，并且 $m(\lambda)=m(-\lambda)$。

(v) $\delta(G)\leqslant\lambda_{max}(G)\leqslant\Delta(G)$。

(vi) 如果 H 是 G 的一个生成子图，则 $\lambda_{min}(G)\leqslant\lambda_{min}(H)\leqslant\lambda_{max}(H)\leqslant\lambda_{max}(G)$。

证明：(i) 令 $\mathbf{x}=(x_i)$ 是对应于特征值 λ 的一个非零特征向量，令 x_p 是具有最大模的权：对每个 i，有 $|x_p|\geqslant|x_i|$，不失一般性，我们可以假设 $x_p=1$，则

$$|\lambda|=|\lambda x_p|=\left|\sum_{l=1}^{n}a_{pl}x_l\right|\leqslant\sum_{l=1}^{n}a_{pl}|x_l|\leqslant|x_p|d(v_p)$$

$$\leqslant|x_p|\Delta=\Delta, \qquad (*)$$

这就证明了 $|\lambda|\leqslant\Delta$。

(ii) 如果 $\lambda=\Delta$ 是一个特征值，而 $\mathbf{x}$ 和 x_p 如在(i)中那

样选取，则(*)蕴含 $d(v_p)=\Delta$ 且对于邻接于 v_p 的 v_l 有 $x_l=x_p=1$。反过来，这蕴含 $d(v_l)=\Delta$，且对邻接于 v_l 的 v_k 有 $x_k=x_l=1$，等等；因为 G 是连通的，对于每个 i 有 $d(v_i)=\Delta$ 和 $x_i=1$。因此，G 是 Δ—正则的，而 $\mathbf{x}$ 是向量 $\mathbf{j}$，即其所有分量皆为 1 的向量。

反之，如果 G 是 Δ—正则的，则 $(A\mathbf{j})_i=\sum_{l=1}^{n}a_{il}=\Delta$，故 $A\mathbf{j}=\Delta\mathbf{j}$。

(iii) 如果 $\lambda=-\Delta$ 是一个特征值，则象在(ii)中那样，不等式(*)蕴含 $d(v_p)=\Delta$ 且对邻接于 v_p 的 v_l 有 $x_l=-x_p=-1$。象在(ii)中那样，这蕴含 G 是 Δ—正则的。并且，在每一个与 v_l 邻接的顶点 v_k 处，权都是 1；在 vk 的每个邻接顶点处，权都是 -1 等等。在与 v_p 的距离为偶数的顶点处权都是 1，而在其它顶点处权都是 -1，而且每条边联结两个具有不同权的顶点。所以，G 是二部图，比如说 $V=V_1\cup V_2$，此处 $x_p\in V_1$。

(iv) 假设 G 是具有顶点类 V_1 和 V_2 的二部图，令 $\mathbf{b}$ 是在 V_1 上为 1 而在 V_2 上为 -1 的函数（向量），则 $\mathbf{x}\longrightarrow\mathbf{b}^{\mathbf{x}}=(b_ix_i)_1^n$ 是向量空间 $C_0(G)$ 的一个自同构。现在，如果 $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$，且设 $v_i\in V_1$，则

$$(A(\mathbf{bx}))_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_jx_j=\sum_{v_j\in V_1}a_{ij}x_j-\sum_{v_j\in V_2}a_{ij}x_j$$

$$=-\sum_{v_j\in V_2}a_{ij}x_j=-\sum_{v_j\in V_1}a_{ij}x_j-\sum_{v_j\in V_2}a_{ij}x_j$$

$$=-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=-\lambda x_i=-\lambda(\mathbf{bx})_i。$$

因此，b 给出了 $Ker(A-\lambda)$ 和 $Ker(A+\lambda)$ 之间的一个同构，这就证明了 $m(\lambda)=m(-\lambda)$。

(v) 我们已经知道，$\lambda_{max}(G)\leqslant\Delta(G)$。注意，对于 $\mathbf{j}=(1,1,\cdots,1)$，我们有

$$\langle \mathbf{j},\mathbf{j}\rangle=n,$$

故

$$V(A)\ni\frac{1}{n}\langle A\mathbf{j},\mathbf{j}\rangle=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}d(v_k)\geqslant\delta(G)。$$

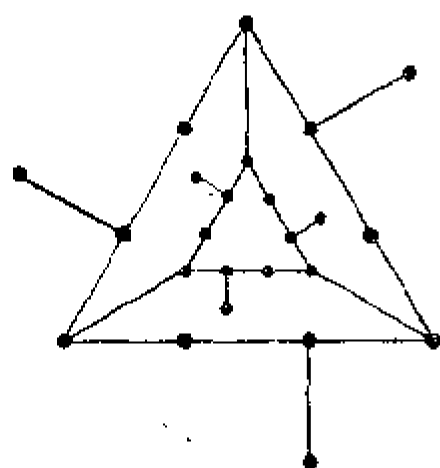
因此，$\lambda_{max}(G)=\max V(A)\geqslant\delta(G)$。

(vi) 只要对一个 $n-1$ 阶生成子图 H（比如说 $V(H)=\{v_1,v_2,\cdots v_{n-1}\}$）证明这个结果即可。

令 A' 是 H 的邻接矩阵，则存在向量 $\mathbf{y}\in C_0(H)$，使 $\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle=1$ 和 $\langle A'\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle=\lambda_{max}(H)$。令 $\mathbf{x}=(y_1,y_2\cdots,y_{n-1},0)$，则 $\mathbf{x}\in C_0(G)$，$\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle=1$ 和 $\langle A\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle=\langle A'\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle=\lambda_{max}(H)\in V(A)$，因此，$\lambda_{max}(G)\geqslant\lambda_{max}(H)$。另一个不等式的证明与此类似 □

希望一个具有许多自同构的图有特别满意的性质，并希望这些性质在邻接矩阵上反映出来，这是合情合理的。图 G 的**自同构群**是一个群，记作 $AutG$，它由保持顶点的邻接性的各个置换组成。每个抽象群都能表示为某个自同构群。例如，如果 F 是任意一个有限群，考虑它的关于某个生成元集的 Cayley 图解。这个**着色的且有向的重图**的自同构群恰

好是 F。剩下要做的事只是用适当的子图代替这个Cayley图解的每条边，使得原来用方向和颜色给出的信息由这个子图来担当，这就产生了一个图 G，它有与 F 同构的自同构群. 在图Ⅷ.10中给出了一个例子。



图Ⅷ.10. 由图Ⅶ. 10.中的Cayley图解构造的具有自同构群 S_3 的一个图。

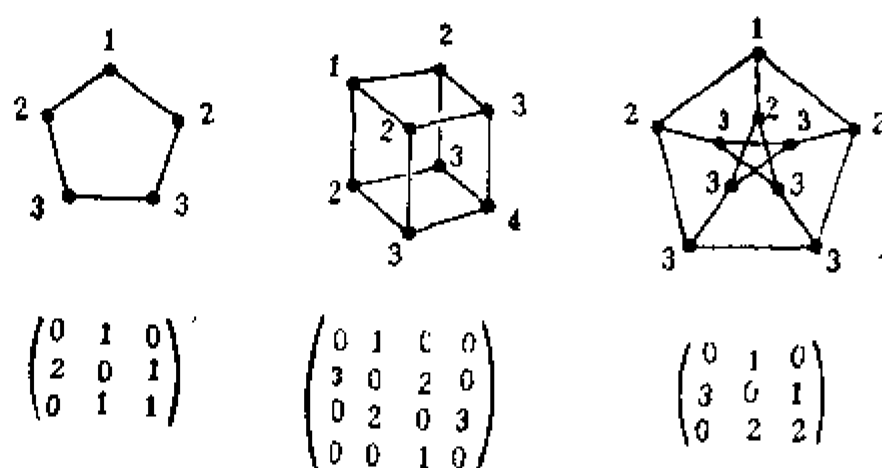
每个 $\pi\in AutG$ 导出 $C_0(G)$ 的一个自同态，它由一个置换矩阵 P 来描述。事实上，任意一个置换矩阵 Q 当且仅当它与邻接矩阵 A 可换，即 $AQ=QA$ 时，对应于 G 的一个自同构。因此，这些矩阵所组成的群正好表示 $AutG$。把 A 看作 $C_0(G)$ 的一个自同态，我们发现，A 的各特征空间是在 P 之下的不变量。特别是，如果 A 的一个特征值是单重的(即它的重数是 1)，则 P 必把一个特征向量映射成它本身的倍数。这样，如果所有特征值都是单重的，我们必有 $P^2=I$。这是对于那些能对应于 G 的自同构的置换的一个较强的限制。例如，如果 G 至少有三个顶点，且每个特征值都是单重的，则 $AutG$ 不能是顶点一传递的，故不是每对顶点都能被一个自同构互换。

由此可知怎样用表示理论的方法导出对具有大自同构群的图的邻接矩阵的限制。本书篇幅使我们不能进一步研究这个问题，因此，我们将用代数方法来研究高度正则的图，尽管这种正则性不是用自同构群来表述的。

如果我们想证明，除了可能对于某些参数的一个小集

外，某些正则性条件不能满足，代数方法是特别有用的。一个这种类型的问题出现在第Ⅳ章中：对于 k 的哪些值，存在阶为 $n=k^2+1$ 而围长为 5 的 k—正则图？以后我们将证明，如果存在这样的图，则 k 是 2、3、7 或 57。在这类问题中，特别是由于对散在的单群的研究，群论有特别丰富的内容。以后，我们将提到一些例子。

正则性，即所有顶点都有同样的度 k 这一条件，不是一个很强的限制。因为存在太多的 n 阶 k—正则图（只要 $k<n$ 和 kn 是偶数），故我们必须大大加强正则性条件以寻求有趣的类。设 G 是一个连通图，如果对于每个顶点 $x\in V=V(G)$，都存在 V 的一个划分：$V_1=\{x\}$，V_2，…，V_p，使得每个顶点 $y\in V_i$ 与 V_j 中的恰好 c_{ij} 个顶点邻接，则称 G 是**具有塌缩邻接矩阵** $C=(c_{ij})$ 的一个**高度正则图**。（参见图Ⅷ.11）



$$\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&1&0&0\\3&0&2&0\\0&2&0&3\\0&0&1&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&1&0\\3&0&1\\0&2&2\end{pmatrix}$$

图Ⅷ.11．具有塌缩邻接矩阵的五边形，立方体和 Petersen 图。

可以直接由定义得知，G 是正则的，比如说每个顶点的度为 k。在这种情形，在塌缩矩阵中，每个**列和**是 k。塌缩矩阵 C 可由邻接矩阵 A 用下述方法得到：

$$c_{ij} = \sum_{v_s \in V_j} a_{st},$$

此处 $v_t \in V_i$。其要点就是：上面的和与 V_i 的代表 v_t 无关。如果 C 比 A 小得多，我们对塌缩邻接矩阵 C 特别感兴趣。

考虑属于顶点 $x = v_1$ 的一个划分 $V_1 = \{v_1\}$，V_2，…，V_p。令 P 是形如 $\sum_{i=1}^{p} z_i V_i$，$z_i \in \mathbf{C}$ 的形式和组成的 p—维复向量空间，并令：

$$\pi: C_0(G) \longrightarrow P$$

是由

$$\pi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{v_j \in V_i} x_j\right) V_i$$

给出的线性映射。当然，C 能看作将 P 映成其自身的一个映射。

定理 6.

(i) $\pi A = C\pi$，即对于每个 $X \in C_0(G)$，$\pi(AX) = C(\pi X)$。

(ii) 邻接矩阵 A 和塌缩邻接矩阵 C 有同样的最小多项式。特别是，λ 是 A 的特征值当且仅当它是 C 的特征多项式的根。

证明： (i) 我们来证明 $\pi(Av_t) = C(\pi v_t)$，此处 v_t 是对应于一个任意顶点 $v_t \in V_j$ 的基向量。为了做到这一点，只须检查两边的第 i 个坐标是否相等即可。显然 $\pi v_t = V_j$，故

$$(\pi(Av_t))_i = \sum_{v_s \in V_i} a_{st}$$

和

$$(C(\pi v_i))_1 = (CV_i)_1,$$

依定义，这些等式成立。

(ii) 令 q 是 C 的最小多项式，为了证明 $q(A)=0$，依对称性，只须检查对于每个 $\mathbf{x}$ 都有 $(q(A)\mathbf{x})_1=0$。确是如此：

$$(q(A)\mathbf{x})_1 = (\pi(q(A)\mathbf{x}))_1 = (q(C)(\pi\mathbf{x}))_1$$
$$= (O)_1 = 0$$

反之，因为 $\pi C_0(G)=P$，A 的最小多项式零化 C。 □

这个结果能够使我们更严格地限制可以作为塌缩邻接矩阵的矩阵 C。

定理7. 令 G 是一个 n 阶的连通的非二部的高度正则图，它有塌缩邻接矩阵 C。令 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_r 是 C 的特征多项式的根，它们都与 G 的顶点的度 k 不同，则存在自然数 m_1，m_2，$\cdots$，m_r，使

$$\sum_{i=1}^{r} m_i = n-1$$

和

$$\sum_{i=1}^{r} m_i\lambda_i = -k\ 。$$

证明：由定理 5 我们知道，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots$，$\lambda_r$ 是 A 的除了 k 之外的特征值，k 有重数 1。这样，如果 $m(\lambda_i)$ 是 λ_i 的重数，因为 $C_0(G)$ 有由 A 的特征向量组成的标准正交基，则

$$1+\sum_{i=1}^{r} m(\lambda_i) = n。$$

并且，因为 A 的迹是 0，且基的改变不改变迹，故有

$$trA = k + \sum_{i=1}^{r} m(\lambda_i)\lambda_i = 0。$$ □

定理 7 的条件是不容易满足的，特别是当 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 不是有理数时，条件更不容易满足，故这排除了构造许多具有似乎可行的参数的高度正则图的可能性。对于所谓强正则的图，我们将把条件改写成更有吸引力的形式。如果图 G 是 k—正则的，其任何两个邻接顶点恰有 a 个公共的邻接顶点，任何两个不邻接的顶点恰有 $b \geq 1$ 个公共邻接顶点，则称 G 是**具有参数 (k, a, b) 的强正则图**。换言之，G 是具有塌缩邻接矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k & a & b \\ 0 & k-a-1 & k-b \end{pmatrix}$$

的高度正则图。

定理 8. 如果存在具有参数 (k, a, b) 的 n 阶强正则图，则

$$m_1, m_2 = \frac{1}{2}\left\{n - 1 \pm \frac{(n-1)(b-a) - 2k}{\{(a-b)^2 + 4(k-b)\}^{1/2}}\right\}$$

都是自然数。

证明： 塌缩邻接矩阵 C 的特征多项式是 $x^3 + (b - a - k)x^2 + ((a-b)k + b - k)x + k(k-b)$，用 $x - k$ 除，我们求得与 k 不同的根是

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}\{a - b \pm \{(a-b)^2 + 4(k-b)\}^{1/2}\}。$$

依定理 7，存在自然数 m_1 和 m_2，它们满足

$$m_1 + m_2 = n - 1$$

和

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 = -k。$$

对 m_1 和 m_2 解这个方程组，就得出定理的断言。 □

有时称定理 8 为强正则图的有理性条件，不引用定理 7 证明这个结果也很容易。事实上，如果 A 中是一个具有参数 (n,k,a,b) 的强正则图的接邻矩阵，则

$$(A^2)_{ij} = \begin{cases} k & 如果\ i = j, \\ a & 如果\ v_iv_j \in E(G), \\ b & 其它情形。\end{cases}$$

因此

$$A^2 = kI + aA + b(J - I - A),$$

此处 J 是所有元素皆为 1 的矩阵。因此，J 是 A 中的二次多项式，故 J 和 A 是可联合对角化的。注意，J 仅有两个特征值：n，它有重数 1，0，它有重数 $n-1$。我们容易求得 λ_1 和 λ_2 如上（参看练习 28）。

现在，我们将使用有理性条件来履行我们的关于直径为 2（或围长为 5）的 Moore 图的诺言。

定理 9. 假设存在直径为 2 而阶为 $n = k^2 + 1$ 的 k—正则图 G，则 $k = 2, 3, 7$ 和 57。

证明： 由第Ⅳ章定理 1 可以知道，G 是具有参数 $(k,0,1)$ 的强正则图。依据有理性条件，下面两个条件中至少有一个必成立：

(i) $(n-1)-2k=k^2-2k=0$ 而 $n-1=k^2$ 是偶数。

(ii) $1+4(k-1)=4k-3$ 是一个平方数，比如说 $4k-3=s^2$。

现在，如果(i)成立，则 $k=2$。

如果(ii)成立，则 $k=\frac{1}{4}(s^2+3)$；以此代入重数 m_1 的表示式，我们求得

$$m_1=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{16}(s^2+3)^2+\frac{[(s^2+3)^2/16]-[(s^2+3)/2]}{s}\right\}$$

即

$$s^5+s^4+6s^3-2s^2+(9-32m_1)s-15=0。$$

因此 s 除尽 15，故 s 是值 1，3，5 和 15 之一，这就给出了 $k=1,3$，7 或 57，而 $k=1$ 这种情形显然是不能实现的。 □

值得注意的是，对于 $k=2$，3 和 7，存在唯一的直径为 2（故围长为 5）而阶为 k^2+1 的 k—正则图。特别是对于 $k=2$，它是五边形，对于 $k=3$，它是 Petersen 图，但是，还不知道 $k=57$ 是不是可以实现。

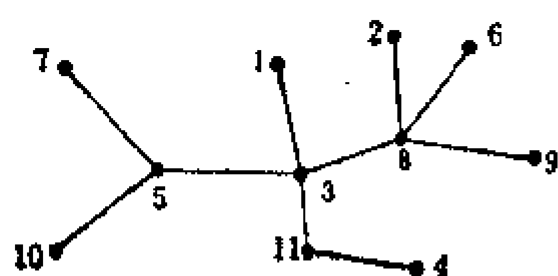
散在的单群是这样一些单群，它们不属于由素数阶循环群、度至少为 5 的交替群和李型单群组成的各无穷序列。我们在前面说过，散在的单群常常同强正则图有联系。例如，存在一个具有参数(162,105,81)的强正则图，而 898128000 阶的 Machaughlin 群是这个图的自同构群的一个指数为 2 的子群。类似地，存在一个具有参数(416,100,96)的强正则图，而 448345497600 阶的单群 Suzuki 群是这个图的自同构群的一个指数为 2 的子群。

§3 计数和Pólya定理

在结束本书前我们必须考虑下列可能是有关图的最基本问题，即它们中有多少个是存在的。我们可能要计算具有给定的顶点集的图的数目，或者，我们可能对某些图的同构类的数目感兴趣。正象我们在第Ⅶ章中所看到的那样，计算标定图的数目相对地比较容量，例如，在 n 个顶点上存在$2^{\binom{n}{2}}=2^N$ 个标定图，其中$\binom{N}{m}$个有 m 条边．并且，通过把第Ⅱ章的定理 8 应用于完全图，我们容易证明出存在 n^{n-2} 个 n 阶标定树。这个结果首先由 Cayley 获得，我们这里将介绍它和由 Prüfer 给出的证明，这个证明不用第Ⅱ章的定理 8。

定理 10. 在 n 个标了号的顶点上存在 n^{n-2} 个树。

证明： 象在第Ⅶ章中那样，令 $V=\{1,2,\cdots,n\}$ 是顶点集。给定一棵树 T，按下述方法给 T 加上代码：去掉具有最小标号的端点，写下其邻接顶点的标号．不断重复这一过程，直到仅剩下两个顶点为止。所得到的代码是长度为 $n-2$ 的由 $1,2,\cdots,n$ 中的一些数组成的一个序列，当然，任何数在代码中都可能出现若干次（参见图Ⅷ.12）。读者可以检查，n^{n-2} 个可能的代码中的每一个都对应于唯一的一棵树。 □



图Ⅷ.12．这个树的 Prüfer 代码是 (3,8,11,8,5,8,3,5,3)。

显而易见，度为 d 的一个顶点的标号在这棵树的 Prüfer 代码中出现恰好 $d-1$ 次。所以，这个证明有下面的推论

推论 11. 令 $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n$ 是一棵树的度序列：$d_1 \geqslant 1$ 而 $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$，则具有度序列 $(d_i)_1^n$ 的 n 阶标定树的数目由多项式系数

$$\binom{n-2}{d_1-1,\quad d_2-1,\ \cdots,\ d_n-1}$$

给出。 □

如果我们想要在同构的意义下来计算某种图的数目，我们遇到的困难完全变了。给定具有公共顶点集 V 的图 G_1 和 G_2，它们什么时候同构？如果存在 V 的置换 π，它把 G_1 映射成 G_2，则 G_1 与 G_2 同构。当然，严格地说，π 不是作用在图上的，它仅导出顶点对集 $X=V^{(2)}$ 的一个置换 α，正是 α 把 G_1 的一条边映射成 G_2 的一条边，并把 G_1 的非边映射成 G_2 的非边。现在，G_i 自然而然地等同于 X 的一个子集，或者换句话说，G_i 等同于一个函数 f_i：$X \longrightarrow \{0,1\}$。因此，$G_1$ 同构于 G_2 当且仅当存在 $X=V^{(2)}$ 的一个置换 α（来自 V 的置换 π），使 $\alpha^* f_1 = f_2$，此处 α^* 是由 α 导出的函数集 $\{0,\ 1\}^X$ 上的一个置换。这样，计算同构意义下的图的数目问题是下面问题的一种特殊情形。给定集 X、Y 和作用在 X 上的群 Γ，令 Γ 以通常的方式作用在函数集 Y^X 上。在 y^X 中存在多少个轨道？这一节的主要目的是介绍 PôlYa

的一个很好的定理，它回答了这个问题。

令 Γ 是作用在一个（有限）集 X 上的一个置换群。对于 x，$y \in X$，置 $x \sim y$ 当且仅当对于某个 $\alpha \in \Gamma$，$y = \alpha x$，则 $\sim$ 是 X 上的一个等价关系。如果 $x \sim y$，我们说在 Γ 之下 x **等价于** y。x 的等价类称为 x 的 Γ—**轨道**（或简单称作**轨道**），记作 $[x]$。对于 x，$y \in X$，记

$$\Gamma(x,y) = \{\alpha \in \Gamma;\ \alpha x = y\}。$$

当然，$\Gamma(x,y)$ 非空当且仅当 $[x] = [y]$，即 x 和 y 属于同一轨道。$\Gamma(x) = \Gamma(x,x)$ 是 x 的**稳定子**，它是 Γ 的一个子群。注意，如果 $y = \beta x$，则

$$\Gamma(x,y) = \{\alpha : \alpha x = y\} = \{\alpha : \alpha x = \beta x\}$$
$$= \{\alpha : \beta^{-1}\alpha \in \Gamma(x)\} = \beta\Gamma(x),$$

故 $\Gamma(x,y)$ 是 $\Gamma(x)$ 的一个陪集。我们看出，$|\Gamma(x)|$ 依赖于 x 的等价类，故我们可以记

$$s([x]) = |\Gamma(x)|。$$

显然

$$\Gamma = \bigcup_{y \in [x]} \Gamma(x,y),$$

而这给出

$$|\Gamma| = |[x]|\,|\Gamma(x)| = |[x]|s([x])。$$

这一节标题中提到的定理是基于 Burnside 引理的一种说法，这个引理有关轨道的"权"之和。令 $O_1, \cdots, O_t$ 是各 Γ—轨道，令 A 是一个任意的 Abelian 群（其中的运算写作加法）并令 w：$X \longrightarrow A$ 是在每个轨道上为常量的一个函数。我们称 w 为权函数，并定义 O_i 的权为 $w(O_i) = w(x)$，$x \in O_i$。对于置换 $\alpha \in \Gamma$，用 $F(\alpha)$ 表示在 α 作用下不变的元

素的集，即$F(\alpha)=\{x\in X:\alpha x=x\}$。这样，$x\in F(\alpha)$当且仅当$\alpha\in\Gamma(x)$。

引理 12. $|\Gamma|\sum_{i=1}^{l}w(O_i)=\sum_{\alpha\in\Gamma}\sum_{x\in F(\alpha)}w(x)$。

证明：
$$\sum_{\alpha\in\Gamma}\sum_{x\in F(\alpha)}w(x)=\sum_{x\in X}\sum_{\alpha\in\Gamma(x)}w(x)$$
$$=\sum_{i=1}^{l}\sum_{x\in O_i}\sum_{\alpha\in\Gamma(x)}w(x)$$
$$=\sum_{i=1}^{l}w(O_i)\sum_{x\in O_i}\sum_{\alpha\in\Gamma(x)}1$$
$$=\sum_{i=1}^{l}w(O_i)|O_i|s(O_i)$$
$$=|\Gamma|\sum_{i=1}^{l}w(O_i)。$$
□

Burnside 引理原来的形式是在取$A=\mathbf{Z}$和$w\equiv 1$的情况下得到的：

$$N(\Gamma)=\frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\alpha\in\Gamma}\sum_{x\in F(\alpha)}1=\frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\alpha\in\Gamma}|F(\alpha)|,$$

此处，$N(\Gamma)=l$是轨道的数目。

我们用两个很简单的例子说明，甚至 Burnside 引理也可以用来计算某些对象的等价类的数目。

例 1. 令$X=\{1,2,3,4\}$和$\Gamma=\{1,(12),(34),(12)(34)\}$，$N(\Gamma)$等于什么？显然，$F(1)=\{1,2,3,4\}$，$F((12))=\{3,4\}$，$F((34))=\{1,2\}$和$F((12)(34))=\phi$。这样，$N(\Gamma)$

$= \frac{1}{4}\{4+2+2+0\}=2$。

例 2. 考虑由 5 颗珠子做成的所有手镯，珠子可以是红的、蓝的和绿的。如果将一个手镯旋转可以得到另一个手镯，就把这两个手镯看作是相同的，（不允许翻转！）有多少个不同的手镯？

在这种情形中我们选取 X 是所有 $3^5=243$ 个手镯的集合，并令 Γ 是作用在 X 上的 5 阶循环群 C_5，则该问题是：Γ 有多少个轨道？对于单位元素 $1\in\Gamma$，显然有 $F(1)=X$，对于每个非平凡的旋转 $\alpha\in\Gamma$，仅 3 个单色手镯在 α 下是不变的，故 $N(\Gamma)=\frac{1}{5}\{243+3+3+3+3\}=51$。

第二个例子有点象我们真正想解决的问题. 令 Γ 是一个（有限）集 D 的一个置换群，令 R 是另一个（有限）集，我们考虑从 D 到 R 中的所有函数的集合 R^D，可使每个 $\alpha\in\Gamma$ 作用在 R^D 上，即定义 α^*：$R^D\longrightarrow R^D$ 为

$$(\alpha^*f)(d)=f(\alpha d),\quad f\in R^D, d\in D。$$

于是

$$\Gamma^*=\{\alpha^*;\alpha\in\Gamma\}$$

是 R^D 的置换的一个群，作为一个抽象群，它同构于 Γ，而我们将它与 Γ 区别，仅仅是为了强调它作用在 R^D 之上，而 Γ 作用在 D 上。

由于与 Polya 定理有关的习惯，我们采用直观的术语。D 称为**域**，而它的元素称为**位**，R 是**值域**，而它的元素称为

图形，在 R^D 中的函数叫做**构形**，最后，一个**型**是在 Γ^* 下构形的等价类，即一个 Γ^*—轨道。我们的主要目的是计算不同的型的数目。

这种术语的起源是：一个函数 $f\in R^D$ 是一种安排，它把某些图形安排在一些位上，使每个位上恰有一个图形，但是，每个图形根据我们的要求可以任意安排在许多位上。被 Γ^* 的元素相互映射的两个构形有同样的型，而不加区别。这样，在第二个例子中，位是1,2,3,4和5，图形是 r，b 和 g（表示红，蓝和绿），而一个构形是形如 g,b,b,r,b 的一个序列，即手镯。群 Γ 由（12345）生成，而不同的型对应不同的手镯。

除了计算不同的型的数目之外，我们可以要求计算具有某种性质的型的数目。结果是，所有这些问题都可以一次解决，只要我们充分地了解作用在 D 上的 Γ 中的各置换的循环结构，并乐于存储许多关于型的信息。

每个元素 $\alpha\in\Gamma$ 作用在 D 上时是不相交的循环（循环置换）的本质上唯一的乘积。如果 $\alpha=\xi_1\xi_2\cdots\xi_m$ 是这样一个积，我们说 ξ_1，ξ_2，…，ξ_m 是 α 的**圈环**。我们将长为1的循环也包含在这个乘积中，故每个 $\alpha\in D$ 出现在恰好一个循环中，如果用 $|\xi|$ 表示在 ξ 中的元素的数目，则 $\sum_{k=1}^{m}|\xi_k|=d$，此处 $d=|D|$ 是 D 中的元素的数目，依据前面的等式有 $\sum_{k=1}^{m}kj_k(\alpha)=d$。注意，出现在Burnside引理中的 $|F(\alpha)|$ 就是 $j_1(\alpha)$，它是 α 作用下不动的元素的数目。我们定义 Γ 的

循环和为

$$\tilde{Z}(\Gamma;a_1,\cdots a_d)=\sum_{\alpha\in\Gamma}\prod_{k=1}^{d}a_k^{j_k(\alpha)}$$

这里和前面一样 $d=|D|$。请读者记住，$\tilde{Z}$ 依赖于在 D 上的 Γ 的作用，而不仅仅依赖于抽象群 Γ。再注意，循环和是 $a_1,a_2,\cdots,a_d$ 的具有整系数的多项式，它告诉我们各种循环在 Γ 的元素中的分布。当写出循环和时，记住对于每个 α 有 $\sum_{k=1}^{d}kj_k(\alpha)=d$ 是有益的。为我们所熟知的 Γ 的循环指数是 $Z(\Gamma;a_1\cdots,a_d)=(1/|\Gamma|)\tilde{Z}(\Gamma;a_1,\cdots,a_d)$。因为我们将考虑一般的环而不仅仅是通常的具有有理系数的多项式环。我们必须使用循环和，因为我们不能用 $|\Gamma|$ 来除。

令 A 是任意一个可换环，并令 w：$R\longrightarrow A$ 是一个函数。我们称 $w(r)$ 是图形 r 的**权**，对于 $k=1,2,\cdots$ 定义第 k 个**图形和**如下：

$$s_k=\sum_{r\in R}w(r)^k。$$

并且，构形 $f\in R^D$ 的**权**是

$$w(f)=\prod_{a\in D}w(f(a))。$$

显然，在 Γ^* 下等价的任何两个构形有同样的权，故我们可以定义型 O_i 的**权**如下：

$$w(O_i)=w(f),\ f\in O_i。$$

我们的目的是研究**型和**

$$S=\sum_{i=1}^{t}w(O_i),$$

此处，$O_1,O_2,\cdots,O_l$ 是 Γ^*—轨道，即不同的型。

注意，$w(r),w(f),s_k$ 和 S 都是我们可换环 A 的元素。如果我们有办法确定型和 S，我们就要选取 A 和权函数 w：$R\longrightarrow A$，使得 S 可以"译出来"以告诉我们所有我们想知道的关于型的各个集的信息。实际上，我们总是将 A 选作一个多项式环（$Z(x)$，$Q[x,y]$ 等等。），而 $w(r)$ 通常是首 1 多项式，我们寻找的信息则由多项式 S 的某些系数给出。在我们的主要结果—Pòlya 定理证明之后，我们将给出几个例子。

定理 13. （Pòlya 计数定理）

$$|\Gamma|S=\tilde{Z}(\Gamma;s_1,s_2,\cdots,s_d)。$$

证明：依据引理 12，有

$$|\Gamma|\,S=|\Gamma|\sum_{i=1}^{l}w(O_i)=\sum_{\alpha\in\Gamma}\ \sum_{f\in F(\alpha^*)}w(f)。$$

现在，显然有

$F(\alpha^*)=\{f\in R^D$：f 在 α 的每个循环上是常量$\}$，故如果 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 是 α 的循环，而 $a\in\xi_i$ 表示 a 是循环 ξ_i 的一个元素，则

$F(\alpha^*)=\{f\in R^D$：$r_i\in R$，且如果 $a\in\xi_i,i=1,2,\cdots,m$，则 $f(a)=r_i\}$。

因此，

$$\sum_{f\in F(\alpha^*)}w(f)=\sum_{(\forall i)\in R}\ \prod_{i=1}^{m}w(r_i)^{l_i}$$

$$=\prod_{k=1}^{d}\Big(\sum_{r\in R}w(r)^k\Big)^{j_k(\alpha)}=\prod_{k=1}^{\alpha}s_k^{j_k(\alpha)},$$

这给出

$$|\Gamma|S=\sum_{\alpha\in\Gamma}\prod_{k=1}^{d}s_k^{j_k(\alpha)}=\tilde{Z}(\Gamma;s_1s_2,\cdots,s_d)。\quad \square$$

如果$|\Gamma|$在环A中有逆元素，比如说，如果A是有理数域上的一个多项式环，则定理13也可以写成更常见的形式：

$$S=Z(\Gamma;s_1,s_2,\cdots,s_d)。$$

现在我们来说明此定理如何应用。

例3，我们再考虑用5颗珠子做成的手镯，5颗珠子可以是红的，蓝的和绿的，则$D=\{1,2,3,4,5\}$是珠子的位集，$R=\{r,b,g\}$是颜色（图形）集，而Γ是由置换(12345)生成的5阶循环群C_5，循环和是$\tilde{Z}=a_1^5+4a_5$。若选取$A=Z$和$w(r)=w(b)=w(g)=1$，我们求得，对于每个$k, s_k=3$，故$5S=3^5+4\times3$，因为每个型（手镯）有权1，存在$\frac{1}{5}\{3^5+12\}=51$个不同的型（手镯）。

选取$A=Z[x,y]$和$w(r)=1, w(b)=x, w(g)=y$，我们求得$S=\frac{1}{5}\{(1+x+y)^5+4(1+x^5+y^5)\}$。现在，很容易从$S$的这个形式中获得许多信息。例如，一个手镯有权$xy^2$当且仅当它有2颗红的，1颗蓝的和2颗绿的珠子，这样一来，这种手镯的数目是多项式S中xy^2的系数，即是$(1/5)(5!/2!2!)=6$。

例 4. 如果在前面的例子中，我们允许翻转，会发生什么情况呢？如果这样，Γ 是二面体群 D_5 它是正五边形的对称形的群，它的循环和是 $a_1^5+4a_5+5a_1a_2^2$。这样，如果我们象前面那样取 $A=Z[x,y]$，$w(r)=1$，$w(b)=x$，$w(g)=y$，我们求得包含 2 颗红的、1 颗蓝的和 2 颗绿的珠子的手镯数是在 $\frac{1}{10}\{(1+x+y)^5+4(1+x^5+y^5)+5(1+x+y)(1+x^2+y^2)^2\}$ 中的 xy^2 的系数，即 $3+1=4$。

例 5. 这是 Pólya 用以说明它的定理的例子。把 3 个红的、2 个蓝的和 1 个黄的球放在一个正八面体的6 个顶点上，有多少种不同的方法？八面体的对称性的群有循环和 $a_1^6+6a_1^2a_4+3a_1^2a_2^2+6a_2^3+8a_3^2$；$a_1^6$ 来自单位元素，$6a_1^2a_4$ 来自绕通过一对顶点的轴旋转 $\frac{\pi}{2}$，$3a_1^2a_2^2$ 来自绕同一轴旋转 π，$6a_2^3$ 来自绕通过对边的中点的轴旋转 π，最后，a_3^2 是对应于绕通过一个面的中心的轴的旋转 $2\pi/3$ 的加项+。取 $A=\mathbf{Z}[x,y]$，$w(r)=1$，$w(b)=x$ 和 $w(g)=y$，我们看出，要求的数是在 $\frac{1}{24}\{(1+x+y)^6+6(1+x+y)^2(1+x^4+y^4)+3(1+x+y)^2(1+x^2+y^2)^2+6(1+x^2+y^2)^3+8(1+x^3+y^3)^2\}$ 中 x^2y 的系数，即是 3。

到现在，我们已经可以清楚地看出，如果我们取 $\mathbf{Z}[x_{r},$

+ 原书此处有遗漏。——校注。

$r\in R$]，即以 R 的元素为下标的各变量在整数集上的多项式环，而不取一般的可换环 A，而且我们定义权函数为 $w(r)=x_r$ 并不影响定理的一般性。于是，型和 S 包含定理所能给予我们的全部信息，特别是，如果 $w: R\longrightarrow A$ 是任意一个权函数，则对应的型和可以在 S 中以 $w(r)$ 代替 x_r 得到。但是，如果 R 很大，而我们又不选一个比 $\mathbf{Z}[x_r: r\in R]$ "更小"的为手头问题特别设计的环，则计算可能无法进行。当然，较小的环的选取与在 S 中作一个代换等价。

例 6. 把红，蓝，绿和黄四种球放在正八面体的顶点上，用 P_i 表示这种型的集，在这种型中，红球和蓝球的总数等于 $i(mod 4)$，$|P_0|-|P_2|$ 等于什么？

正八面体的旋转群的循环和已在例 5 中算出，它是 $a_1^6+6a_1^2a_4+3a_1^2a_2^2+6a_2^3+8a_3^2$。

令 $A=C$ 是复数域，令 $w(r)=w(b)=i$，$w(g)=w(y)=1$，则对于一个型 f，如果 $f\in P_0$，$Re w(f)=1$；如果 $f\in P_2$，$Re w(f)=-1$；如果 $f\in P_1\cup P_3$，$Re w(f)=0$。这样，$|P_0|-|P_2|$ 恰是型和的实部，由于 $s_1=2(1+i)$，$s_2=0$，$s_3=2(1-i)$ 和 $s_4=4$，我们立即看出，在代换之后，每项的实部皆为 0，故

$$|P_0|=|P_2|。$$

我们之所以要研究置换群的轨道是因为要计算同构意义下的图的数目。我们认识到，这相当于计数作用在 $\{0,1\}^X$ 上的群 Γ_n^* 的轨道，此处 $X=V^{(2)}$，而 Γ_n 是作用在 X 上的置换群，它是由作用在 V 上的对称群导出的。故依据 Pólya

定理，只要我们知道了置换群Γ_n的循环和时，我们的问题就得到解决了。现在，写出这个循环和的显式是轻而易举的，但是，因为它的形式不太令人满意，这里我们就不列出来了．并且，除了对n的较小的值外，它用于实际计算是太麻烦了，而用随机图的方法导出的渐近公式却容易得多（参看第Ⅶ章练习 22 和 23）。

最后，我们说明 Pòlya 定理的一种推广包括下列情形：即还有一个群作用在函数值域上．例如，如果我们令S_2作用在上面例子中的$\{0,1\}$上，我们不区别图和它的补，因此可以计算同构于其补的图的数目。

〔练习〕

1．画出四元群$\langle a,\ b\,|\,a^2=b^2=(ab)^2\rangle$的 Cayley 图解。

2．求$\langle a,b\,|\,a^3=b^3=1,ab=ba\rangle$，$\langle a,\ b\,|\,a^4=b^3=1,ab=ba\rangle$和$\langle a,b\,|\,a^3=b^4=(ab)^2=1\rangle$的阶。

3．使用尤拉公式和关于 Cayley 图解的知识导出：在群$\langle a,b,c\,|\,a^5=b^3=c^2=(abc)^{-1}\rangle$中，有$a^{610}=1$。

4．验证：系于三叶形纽结的 Cayley 图解是在图Ⅶ.5中描述的图。

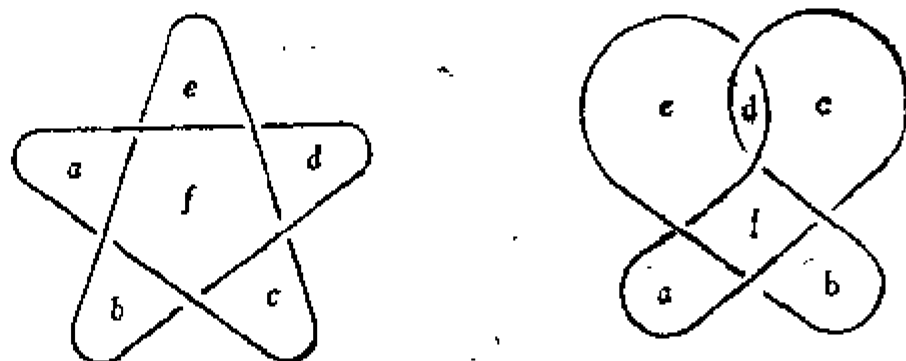
5．写出在图Ⅷ.13中给出的纽结的表示。证明：五叶纽结的群同构于$\langle f,g\,|\,f^5=g^2\rangle$，而小雪茄的群是

$$\langle a,b\,|\,ababa^{-1}b^{-1}babab^{-1}a^{-1}b^{-1}\rangle。$$

6．证明：在图Ⅷ.4和图Ⅷ.13中给出的纽结的群中，

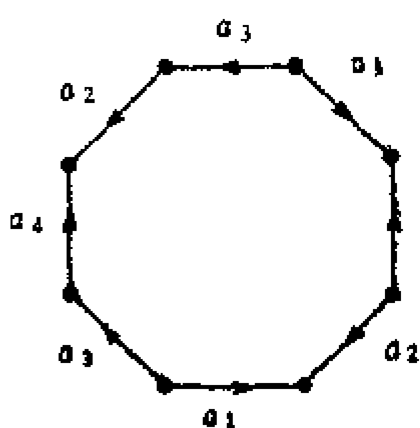
没有两个元是同构的。

7. 一个闭的亏格为2的可定向曲面可用下述方法得到：把八边形的四组不邻接的边的对等同起来，设如图Ⅶ.14所示。其基本群有表示$\langle a_1,a_2,a_3,a_4 \mid a_1a_2^{-1}a_4a_1^{-1}a_3a_2a_4^{-1}a_3^{-1}\rangle$。证明：其Cayley图解是双曲平面的一个分格。推导：等于1的任何非空既约字必包含长至少为5的一个子字，它是循环写出的关系子或它的逆的一部分。(即约字是任何生成元都不出现在其逆的旁边的字。)〔提示：考虑通道W的离1最远的部分。〕



图Ⅶ.13. 五叶纽结和小雪茄图。

8. 证明：二面体群D_n，即正n边形的对称性的群有表示$\langle a,b \mid a^n=b^2=(ab)^2=1\rangle$。它的Cayley图解是什么？



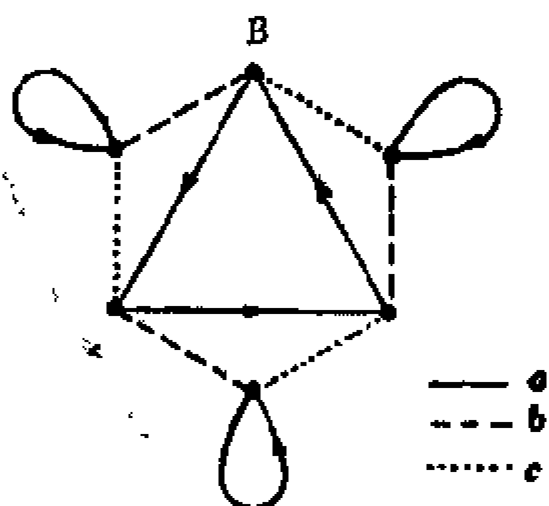
图Ⅶ.14. 一个亏格为2的可定向曲面。

9. 给出一个群，其Cayley图解是有8个三角面和6个八角形面的截角立方体。

10. 画出下列各群的Cayley图解：(i)$\langle a,b \mid ab=ba\rangle$，在欧几里得平面上，(ii)$\langle a,b \mid b^n,ab$

$=ba\rangle$，在无穷柱面上，(iii) $\langle a,b\,|\,a^m=b^n=1, ab=ba\rangle$，在环面上，(iv) $\langle a,b,c\,|\,a^4=b^4=c^4=abc=1\rangle$，在双曲平面上。

11. 检查在图Ⅶ.3中说明的Cayley图解的例子，并证明定理1。



图Ⅶ.15. A的模B的Schreier图解。

12⁻. 令 $A=\langle a,b\,|\,a^3=b^4=(ba)^2=1\rangle$ 和 $B=\langle b\rangle$. A的模B的Schreier图解是什么样的？

13⁻. 群A由a，b和c生成，B是A的一个子群，A的模B的Schreier图解在图Ⅶ.15中给出。写出B的一组生成元的集。

14. 令A是在a、b和c上的自由群，B是所有平方组成的子群。A的模B的Schreier图解是什么样的？求出B的自由生成元的一个集。

15. 在一个秩为k的自由群中，有多少个指数为2的子群？

16. 在有2个生成元的一个自由群中，有多少个指数为n的子群？

17. 证明：一个有限生成自由群F的一个子群B在F中有有限指数当且仅当B是有限生成的并且存在自然数n，对于每个字W，$W^n\in B$。

18. Peterson图(在图Ⅶ.11中给出)的自同构群是什

么？求 Kneser 图 $K_s^{(r)}$（此处，$s\geqslant 2r+1$）的自同构群。（参看 p. 149）。推导：$K_{2r+1}^{(r)}$ 的自同构群是 3—弧—传递的，即任何一条长为 3 的路可由一个自同构映射成任何另外一条长为 3 的路。

19. Tutte 8—笼对于 $n=1,2,\cdots,10$ 有顶点 n_1, n_3, n_5，其边联结 n_5 与 n_1 以及 n_5 与 n_3，并联结 n_i 与 m_i，只要 $|n-m|\equiv\pm i(mod 10)$，证明：Tutte 8—笼的自同构群是 5—弧—传递的。

20. 求 Grotzsch 图（参看 p. 149）的自同构群。

21. 每棵树都有 Abelian 自同构群吗？

22. 构造一棵具有平凡自同构群的非平凡树。

23. 令 $f(n)$ 是具有平凡自同构群的 n 阶图的最小级，证明：对于每个 $n\geqslant 7$，$f(n)<n$，且当 $n\longrightarrow\infty$ 时，$f(n)/n\longrightarrow 1$。

24. 证明：如果 $\pi\in AutG$ 有 k 个奇循环及 l 个偶循环，则 G 至多有 $k+2l$ 个单重特征值。

25. 证明：其自同构群是顶点—传递的一个奇阶连通图恰有一个单重特征值。

26⁻. 令 A 是一个图 G 的邻接矩阵，证明：$(A^l)_{ij}$ 是长为 l 的 v_i—v_j 途道的数目。

27. 给定 $k\geqslant 2$，多项式 $p_0(x)$，$p_1(x)$，…定义如下：$p_0(x)=1$，$p_1(x)=x$，$p_2(x)=x^2-k$，和 $p_l(x)=xp_{l-1}(x)-(k-1)p_{l-2}(x)$，$l\geqslant 3$，证明：如果 A 是一个 k—正则图的邻接矩阵，则 $(p_l(A))_{ij}$ 是长为 l 的 v_i—v_j 路的数目。

28. 如在 p. 245 所建议，完成定理 8 的第二个证明的

细节。

29. 证明：矩阵 J(其所有元素都是 1)是在邻接矩阵 A 中的一个多项式当且仅当 G 是正则的和连通的。

30. 由综合定理 5(vi) 和第Ⅴ章定理 1 推出：$\chi(G) \leqslant \lambda_{max}(G)+1$。

31. 令 $f_G(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k x^{n-k}$ 是图 G(的邻接矩阵) 的特征多项式，证明：$c_0=1$，$c_1=0, c_2=-e(G)$，而 $-c_3$ 是在 G 中的三角形的数目的 2 倍。

32. 令 $f_G(x)$ 是 G 的特征多项式，证明：如果 $e=xy$ 是 G 的一条桥，则

$$f_G(x)=f_{G-e}(x)-f_{G-\{x,y\}}(x)。$$

现在令 F 是具有 $2n$ 个顶点的一个森林，用 d_k 表示独立边的 k—元素集的数目。(这样，d_n 是 1—因子的数目)，证明：

$$f_G(x)=x^{2n}-d_1x^{2n-2}+d_2x^{2n-4}-\cdots+(-1)^n d_n。$$

d_n 的可能值是哪些？

33. 令 G 是一个包含一个奇圈的连通的 k—正则图。在时刻 0 把一个计数器放在一个顶点处，对每个计数器，设其在一个顶点 x 处并表示时刻 t，在与 x 邻接的每个顶点处放一个表明时刻 $t+1$ 的计数器，并移去原来的计数器。证明：当 $t \longrightarrow \infty$ 时，$n_t(x)/k^t$ 趋向于一个极限，此处 $n_t(x)$ 表示在时刻 t 时顶点 x 处的计数器的数目。如果不从各顶点把计数器去掉，相应的断言如何？〔提示：存在由邻接矩阵的特征向量组成的标准正交基。〕

34. 一个 n 阶的 k—正则图 G 的任何两个不邻接的顶点都能被 G 的一个自同构映成任意的另外两个不邻接的顶点，证明：G 是强正则的。G 的特征值是什么？k 和 n 必须满足什么条件？

35. 令 C 是一个高度正则图的塌缩邻接矩阵，证明：$(C^l)_{1,1}$ 是从一个顶点到其自身的长为 l 的通道的数目。解释 C^l 的其它元素。

36. 为什么图Ⅷ.11. 所示的 Petersen 图的塌缩邻接矩阵的特征值一定是有理数？

37. 在图 G 中，每两个邻接顶点恰有一个公共的邻接顶点，每两个不邻接顶点恰有两个公共的邻接顶点，证明：对于在$\{1,2,7,11,56,497\}$中的某个 k，G 是 $2k+1$ 阶的 k—正则图。

38. 令 G 是具有参数$(k,0,b)$的一个 100 阶强正则图，k 的可能值是哪些？当 $k=22$ 时，求其特征值。

39. 用练习 19 的结果计算 Tutte 8—笼的特征值。

40. 给出定理 10 和推论 11 的详细证明。

41. 证明：有 $n-1\geqslant 2$ 条标了号的边的树的数目是 n^{n-3}

42. 证明：在所有标定树中大约有 $1/e$，其一个给定顶点的度为 1，此处，$e=2.71828\cdots\cdots$。（参看第Ⅶ章中的练习 7。）

43. 用 $R(n,k)$表示在其 n 个可区别的顶点中恰有 k 个 1 度顶点的树的数目，证明：

$$\frac{k}{n}R(n,k)=(n-k)R(n-1,k-1)+kR(n-1,k)。$$

44. 证明：在 n 个可区别的顶点上具有 $n-m$ 条边的无圈图有

$$\frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{m}\left(-\frac{1}{2}\right)^{j}\binom{m}{j}\binom{n-1}{m+j-1}n^{n-m-j}(m+j)!$$

个。推导：存在 $\frac{1}{2}(n-1)(n+6)n^{n-4}$ 个具有两个分支的森林。

45. 证明：作用在普通 n 个字母上的对称群 S_n 的环循和是

$$\sum \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} k^{j_k} j_k!} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \cdots\cdots a_n^{j_n},$$

此处求和是对所有划分 $j_1+2j_2+\cdots\cdots+nj_n=n$ 进行的。

46. 作用在 5 个元素的无序对上的 S_5 的循环和等于什么？在 5 个顶点上存在多少个不同构的图？它们中多少个有 5 条边？

47. 令 $Z(\Gamma; a_1, a_2, \cdots\cdots, a_d)$ 是作用在一个集合 D 上的一个置换群 Γ 的循环指标，考虑 Γ 在 D 的所有 k—子集上的作用，存在多少个轨道？

48. 确定作用在(i)顶点上、(ii)边上、(iii)面上和(iv)面和顶点上的立方体的旋转的循环指标。用 n 种颜色的某些颜色对顶点着色有多少种不同的方法？边呢？面呢？顶点和面呢？

49. 证明：n 阶循环群 C_n 的循环和是

$$\tilde{Z}(C_n; a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)=\sum_{k\mid n}\phi(k)a_k^{n/k},$$

此处$\phi(k)$是尤拉函数。

50. 证明：二面体群D_n(参看练习8)的循环指标是

$$Z(D_n;a_1,\cdots\cdots,a_n)=\frac{1}{2}Z(C_n;a_1,\cdots\cdots,a_n)$$

$$+\begin{cases}\frac{1}{2}a_1a_2^{(n-1)/2} & n\text{是奇数,}\\ \frac{1}{4}(a_2^{n/2}+a_1^2a_2^{(n-2)/2}) & n\text{是偶数。}\end{cases}$$

由20颗用红、蓝、绿着色的珠子做成的手镯有多少个？

51. 用红、蓝和绿色对正十二面体的面着色，每种颜色至少用一次，有多少种不同着色方法？

注

关于群表示有大量文献，其中包括Cayley和Schreier图解的应用。基本著作可能是W.Magnus,A.Karrass and D.Solitar,Combinatorial GroupTheory,Second Edition,Dover,New York,1976；与几何的联系是在下书中强调的：H.S.M,Coxeter Regular Complex Polytopes, Combridge University Press,New York,1974。也有大量研究计算问题的文章，特别是J.A.Todd and H.S.M.Coxeter,A practical method for enumerating cosets of a finite abstract group,Proc.Edinaurgh Math.Soc.(2)5(1936)26—34,这是这方面的第一篇文章，还有J.Leech,Computer proof of relations in groups, in Topics,in Group Theory and Computation (M.P.J.Curran,ed.) Academic Rress,New York,1977,此书叙述了新近的一些进展。

Max Dehn在下文中提出了字问题：Uber unendliche diskontinuierlic Gruppen,Math.Ann.71(1911)116—144，他给出的三叶纽结的群的上面讨论的表示见Uber die Topologie des dreidimensionalen Raumes,Math.Ann.69(1910)137—168。字问题的证明本质上是在与逻辑有关的文章中，见P.S.

Novikov, On the algorithmic unsolvability of the word problem, Amer. Math. Soc. Transl, (2)9(1958)1—22 和 G. Higman, Subgroups of finitely presented groups, Proc. Royal Soc. A, 262(1961)455—475。 关于纽结和它的群的性质请读者参看 R. H. Crowell and R. H. Fox, Introduction to Knot Theory, Graduate Text in Mathematics, Vol. 57, Springer-Verlag, New York, 1977。

图论中矩阵方法的说明可在下书中找到：N. Biggs, Algebraic Graph Theory, Cambridge University Press, New York, 1974。用此方法得到的第一个惊人的结果——定理 9 属于 A. J. Hoffman and R. R. Singleton, On Moore graphs with diameters 2 and 3, IBM J. Res. Dev. 4 (1960)497—504。图和散在的单群之间的联系在下书中有详细的讨论：R. Brauer and C. H. Sah(editors), Theory of Finite Groups: a Symposium, Benjamin, Menlo Park, 1969。但从那以后又找到了好几个散在的群。

G. Polya 基本计数定理发表在 Kombinatorische Anzahlbestimmungen fur Gruppen und chemische Verbindungen, Acta Math, 68(1937)145—254。许多计数的方法是由 J. H. Redfield 设想的，见：The theory of group-reduced distributions, Ames. J. Math. 49 (1927)433—455。对于 Polya 型计数的标准参考书是：F. Harary and E. M. Palmer, Graphical Enumeration, Academic Press, New York, 1973。

名 词 索 引

平凡图	Trivial graph
平面图	Plane graph
正则图	Regular graph
可平面图	Planar graph
可约构形	Reducible configuration
电导	Conductance
电位差	Potential difference
电流	Electrical current
电阻	Resistance
半径	Radius
四色问题	Four colour problem
边	Edge
边色数	Edge chromatic number
边空间	Edge space
k-边-连通图	k-edge-connected graph
汇	Sink
生成子图	Spanning subgraph
凸性	Convex property
Dehe 问题	Dehn's problems
Zarankiewscz 问题	problem of Zarankiewscz
闭迹	Closed trail
并联	Connection in parollel
关系子	Relator
关联的	Incident

关联矩阵	Incident matrex
字	Word
字问题	Word problem
共轭问题	Conjugacy problem
权	Weight
权函数	Weight function
团数	Cligue nember
同构问题	Isomorphism problem
同构图	Isomorphism graphs
因子	Factor
有向图	Directed graph
有向重图	Directed multigraph
有理性条件	Rationlyty condition
自由群	Free group
自同构群	Automorphism group
自环	Loop
地图	Map
轨道	Orbit
划分学	Partition calculus
多项式恒等	Polynomial identity
多重边	Maltiple edge
色多项式	Chromatic polynomial
色数	Chromatic number
导出子图	Induced subgraph

Hajos 运算	Hajos operation
完全 r-部图	Complete r-partite graph
完全匹配	Complete matching
完全图	Complete graph
完美的可划分成正方形的正方形	Perfect squared square
极图	Extremal graph
克希霍夫定律	Kirchhoff's Laws
射影平面	Projective plane
连通度	Connectivity
连通图	Connected graph
k-连通图	k-connected graph
块	Block
块-割点图	Block-cutvertex graph
围长	Girth
串联	Connection in series
Schrcier 系	Schreier system
邻接的	Adjacent
邻接矩阵	Adjacency matrex
余圈空间	Cocycle space
纽结	Knot
定义关系	Defining relation
Amitsur 和 Levitzki 定理	Theorem of Amitsur and Levitzki

Appel 和 Haken 定理　Theorem of Appel and Haken

Bolloba's 和 Erdos 定理　Theorem of Bolloba's and Erdos

Bondy 和 Chva'tal 定理　Theorem of Bondy and Chvatal

Brooks 定理　Theorem of Brooks

Dehn 定理　Theorem of Dehn

Dilworth 定理　Theorem of Dilworth

Dirac 定理　Theorem of Dirac

Erdös 定理　Theorem of Erdös

Erdos 和 Stone 定理　Theorem of Erdös and Stone

Gallai 定理　Theorem of Gallai

Galvin 和 Prikry 定理　Theorem of Galvin and Prikry

Graham, Leeb 和 Rothschild 定理　Theorem of Graham, Leeb and Rothschild

Hajôs 定理　Theorem of Hajo's

Hales 和 Jewett 定理　Theorem of Hales and Jewett

Hall 定理　Theorem of Hall

Hindman 定理　Theorem of Hindman

Korshunov 定理　Theorem of Korshunov

Kuratowski 定理　Theorem of Kuratowski

Lovász 定理	Theorem of Lovász
Menger 定理	Theorem of Menger
Nielsen 和 Schreier定理	Theorem of Nielsen and Schreier
Petersen 定理	Theorem of Petersen
Pòlya 定理	Theorem of Pòlya
Posa 定理	Theorem of Pòsa
Rado 定理	Theorem of Rado
Ramsey 定理	Theorem of Ramsey
Ringel 和 Youngs	Theorem of Ringel and Youngs
Smith 定理	Theorem of Smith
Schröder 和 Bernstei 定理	Theorem of Schröder and Bernstein
Thomason 定理	Theorem of Thomason
Turán 定理	Theorem of Turán
Tutte 定理	Theorem of Tutte
Tychonov 定理	Theorem of Tychonov
van dre Waerden 定理	Theorem of van der Waerden
定向图	Oriented graph
空图	Empty
变换	Transform
单色集	Monochromatic set
顶点	Vertex

顶点空间	Vertex space
构形	Configuration
构形权	Weight of configuration
拉丁矩形	Latin rectangle
拓扑图	Topological graph
环流	Circulation
奇分支	Odd component
奇圈	Odd cycle
直径	Diameter
国家	County
图	Graph
图形	Figure
图形和	Figure sum
图的单调类	Monotone class of graph
可图的序列	Graphic sequence
图的实现	Realization of a graph
图的级	Size of a graph
图的阶	Order of a graph
Grötzsch 图	Grötzsch graph
Kneser 图	Kneser graph
Moore 图	Moore graph
Petersen 图	Petersen graph
Schreier 图解	Schreier diagram
Cayley 图解	Cayley diagram
货郎担问题	Travelling salesman

	problem
贪婪算法法	Greedy algorithm
孤立顶点	Isolated vertex
始顶点	Initial vertex
弦	Chord
细分	Subdivision
线图	Line graph
廉价的生成树	Economical spanning tree
总电阻	Total resistance
迹	Trail
度序列	Degree sequence
标准基	Standard basis
相邻的	Neighbouring
相邻的国家	Neighbouring countries
树	Tree
欧姆定律	Ohm's law
面	Face
星一三角变换	Star—delte transformation
哈密顿图	Hamiltonian graph
哈密顿路	Hamilton path
哈密顿圈	Hamilton cycle
型	Pattern
型和	Pattern sum
Reidemeister-Schreier	Reidemeister-Schreier

重写过程	rewriting process
独立顶点、边、路	Independent vertices, edges, paths
独立路	Independent paths
流	Flow
流的值	Value of flow
流的量	Amount of flow
流，电流	Current
竞赛图	Tournament
r-部图	r-partite graph
高度正则图	Highly regular graph
通道	Walk
扇	Fan
容量	Capacity
桥	Bridge
值域	Range
特征值	Eigenvalue
密度	Density
断圈	Broken cycle
基本割	Fundamental cut
基本割向量	Fundamental cut vector
基本圈	Fundamental cycle
基本圈向量	Fundamental cycle vector
圈	Cycle

圈空间	Cycle space
圈数	Cyclomatic number
终顶点	Terminal vertex
排除程序	Discharging procedure
距离	Distance
域	Domain
偏序集	Partially ordered set
偶圈	Even cycle
Hadwiger 猜想	Hadwiger's conjecture
Heawood 猜想	Heawood's conjecture
Tait 猜想	Tait's conjecture
随机尤拉的	Randomly Eulerian
随机矩阵	Stochastic matrix
着色	Colouring
割	Cut
割点	Cut vertex
割向量	Cut vector
割空间	Cut space
联	Join
超图	Hypergraph
超滤子	Ultrafilter
森林	Forest
握手引理	Handshaking lamma
最大流最小割定理	Max- flow min-cuttheorem

最小度	Minimum degree
最大度	Maximum degree
塌缩邻接矩阵	Collapsed adjacency matrix
置换的循环	Cycles of permutation
Ramsey 集	Ramsey set
强正则图	Stongly regular graph
循环和	Sycle sum
链	Chain
Kempe 链	Kempe chain
源	Source
滤子	Filter
禁用子图问题	Forbidden subgraph Problem
路，x_0-路	Path, x_0-Path
群的表示	Presentation of groups
叠加原理	Principle of superposition
简单变换	Simple transform
端顶点	Endvertex
端块	Endblock
影	Shadow
整性定理	Integrality theorem
覆盖	Cover

记 号 索 引

$\overline{ab}$　有向边

$A=A(G)$　邻接矩阵

$AutG$　自同构群

$bc(G)$　块—割点图

$B=B(G)$　关联矩阵

$c(x,y)$　容量

$C_0(G)$　顶点空间

$C_1(G)$　边空间

C^l　长为l的圈

diam$G$　直径

$d(x)=d_G(x)$　度

$b(x,y)$　距离

$e=e(G)$　图的级

$E=E(G)$　边集

E^n　空图

$ex(n;F)$　极图级

$F(\alpha)$　不变元素

G　图

$|G|$　图的阶

$G-E'$　边的删除

$G[V']$	生成子图
$G-W$	顶点的删除
$G+xy$	联结 x 和 y
G^n	n 阶图
$G(n,m)$	n 阶和 m 级图
$G_2(m,n)$	二部图
$G\cong H$	同构图
$G+H$	联
$G\cup H$	并
$j_k(a)$	长为 k 的圈数
K^n	完全图
$K(p,q)=K^{p,q}$	完全二部图
$K(n_1,\cdots,n_r)$	完全 r-部图
$K_r(t)$	完全 r-部图
$[m,n]$	集$\{m,m+1,\cdots,n\}$
$M^{(\omega)}$	可数无限子集
$M^{(<\omega)}$	有限子集
N	轨道数
$o(x),O(x)$	朗道记号
$[1,k]$	集$\{1,2,\cdots k\}$
$P_H(x)$	色多项式
P^l	长为 l 的路
$\rho(V)$	幂集
$q(H)$	奇分支数
$\mathrm{rad}G$	G 的半径

$R(G)$ 　G 的实现

$t_{r-1}(n)$ 　Turán的级

$T_{r-1}(n)$ 　Turán 图

TG 　拓扑图

2^M 　幂集

$U(G)$ 　余圈空间

$V=V(G)$ 　顶点集

$v(f)$ 　流的值

$w(f), w(r), w(O_i)$ 　权

$X^{(r)}$ 　r-元组的集

$\lfloor z \rfloor$ 　最大整$\leqslant z$

$\lceil z \rceil$ 　最小整数$\geqslant z$

$z(m,n;s,t)$ 　Zarankiewicz 数

$Z(G)$ 　圈空间

$Z(\Gamma;a_1,\cdots,a_d)$ 　循环指数

$\tilde{Z}(\Gamma;a_1,\cdots,a_d)$ 　循环和

$\beta_0(G)$ 　独立数

$\Gamma(x)=\Gamma_G(x)$ 　邻接于 x 的顶点的集

$\delta(G)$ 　最小度

$\Delta(G)$ 　最大度

$\kappa(G)$ 　连通度

$\lambda(G)$ 　边-连通度

$\chi(G)$ 　色数

$\chi'(G)$ 　边-色数

χ_γ 　曲面的色数